

Meccanica Quantistica

Complementi di Meccanica Quantistica

Carlo Oleari

19/06/2009

Svolgere in dettaglio i seguenti problemi. Scrivere in modo chiaro e ordinato le soluzioni.

Problema 1

La parte che dipende dallo spin dell'Hamiltoniana efficace che descrive l'atomo di positronio, lo stato legato tra un elettrone e un positrone, in un campo magnetico costante B , è data da

$$H_{\text{spin}} = A \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_p + \mu_B B (\sigma_{ez} - \sigma_{pz}),$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_e$ e $\boldsymbol{\sigma}_p$ sono le matrici di Pauli dell'elettrone e del positrone rispettivamente, e μ_B è il magnetone di Bohr (si ricorda che $\mathbf{s} = \hbar/2 \boldsymbol{\sigma}$).

1. In assenza di campo magnetico, lo stato di singoletto giace 8×10^{-4} eV al di sotto dello stato di tripletto. Calcolare il valore di A .
2. Calcolare gli autovalori dell'energia e illustrare graficamente la dipendenza dei livelli energetici dall'intensità del campo magnetico B . Sottolineare i diversi comportamenti per campi deboli e intensi.
3. Se l'atomo di positronio si trova nel suo stato ad energia più bassa in un campo magnetico intenso e questo venisse istantaneamente spento, qual è la probabilità di trovare l'atomo nello stato di singoletto?

Problema 2

Una particella di massa m si muove nel potenziale tridimensionale armonico

$$V_0 = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) .$$

Si applica una perturbazione descritta da

$$V_p = k x y z + \frac{k^2}{\hbar \omega} x^2 y^2 z^2 ,$$

dove k è una costante.

1. Calcolare l'energia dello stato fondamentale al **secondo** ordine in k .
2. Dare il valore numerico della correzione all'energia dello stato fondamentale appena calcolato, se $m = 10$ eV e $k = 11$ eV⁴ (in unità naturali) e $\omega = 1.5 \times 10^6$ GHz.
3. Senza usare la teoria delle perturbazioni, calcolare il valore di aspettazione delle tre componenti del vettore posizione \mathbf{r} nello stato fondamentale dell'Hamiltoniana totale.
Suggerimento: usare le proprietà di simmetria.

Problema 3

Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{A}{\hbar} s_z + \frac{B}{\hbar^2} s_x^2,$$

dove A e B sono due costanti reali e dove s_i è la componente i -esima dello spin.

1. Calcolare i livelli di energia di questo sistema.
2. Se al tempo $t = 0$ la particella si trova in un autostato dello spin con $s_z = +\hbar$, calcolare la funzione d'onda al generico tempo t .