

# Meccanica Quantistica

Carlo Oleari

23/6/2008

Svolgere in dettaglio i seguenti problemi. Scrivere in modo chiaro e ordinato le soluzioni.

## Problema 1

Si consideri una particella quantistica di massa  $m$  vincolata a muoversi in una dimensione  $x$  e sottoposta al potenziale  $V = g|x|$ , con  $g > 0$ .

1. Usando la sola analisi dimensionale, ricavare la dipendenza dell'energia dai parametri del problema.
2. Usando come funzione prova la

$$\Psi = N \theta(x+a) \theta(a-x) \left(1 - \frac{|x|}{a}\right),$$

stimare l'energia dello stato fondamentale. In questa stima,  $a$  è il parametro, mentre  $N$  è la costante di normalizzazione e

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

3. Descrivere **brevemente** come impostereste il calcolo variazionale per stimare l'energia del primo stato eccitato. Che funzione prova suggerireste? Giustificare la risposta.

## Problema 2

Il positronio è simile ad un atomo di idrogeno, ma al posto del protone c'è un positrone, l'antiparticella dell'elettrone (stessa massa e spin, ma carica opposta)

Nel limite non relativistico e considerando la sola attrazione Coulombiana, i livelli energetici e le funzioni d'onda stazionarie sono simili a quelle dell'atomo di idrogeno, eccetto per un fattore di scala.

1. Scrivere la funzione d'onda normalizzata dello stato fondamentale  $1s$ . Usare il raggio di Bohr  $a_0$  come parametro di scala.
2. Calcolare la radice quadrata del valore di aspettazione di  $r^2$  per lo stato  $1s$ , in unità di  $a_0$ .
3. Si consideri il termine iperfine di interazione di contatto dato da

$$H_{\text{int}} = -\frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu}_e \cdot \boldsymbol{\mu}_p \delta(\mathbf{r}),$$

dove  $\boldsymbol{\mu}_e$  e  $\boldsymbol{\mu}_p$  sono i momenti magnetici dell'elettrone e del positrone ( $\boldsymbol{\mu} = ge/(2mc)\mathbf{s}$ ). Per elettroni e positroni,  $|g| \approx 2$ . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, calcolare la differenza di energia tra lo stato fondamentale di singoletto e quello di tripletto.

4. Indicare espressamente quale dei due ha energia minore. Esprimere la differenza di energia tra i due livelli in GHz. Dare il risultato **numerico**.

### Problema 3

Si consideri un atomo in uno stato eccitato  $^1S_0$  (la notazione è quella spettroscopica:  $^{2S+1}L_J$ , con  $S$ ,  $L$  e  $J$  i momenti angolari atomici di spin, orbitale e totale) che decade in uno stato metastabile più basso  $^1P_1$  emettendo un fotone  $\gamma_1$ . Subito dopo, l'atomo decade nuovamente e raggiunge lo stato fondamentale  $^1S_0$ , emettendo un secondo fotone  $\gamma_2$ . Sia  $\theta$  l'angolo tra i due fotoni

1. Calcolare la distribuzione di probabilità dell'evento in funzione di  $\theta$ .
2. Qual è il rapporto delle probabilità di trovare entrambi i fotoni con la stessa polarizzazione circolare, rispetto a quella di trovarli con polarizzazione circolare opposta?

Qualora servisse una qualche matrice di rotazione e in mancanza di tempo per il calcolo della stessa, prendere la forma esplicita dai libri di testo messi a disposizione.