Meccanica Quantistica
I prova di esonero

20 Novembre 2018

Risolvere almeno due dei seguenti esercizi

Tempo 2 ore

Esercizio I. Un sistema fisico a tre stati è descritto da una Hamiltoniana che, in una certa base, è rappresentata dalla matrice

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con ω constante reale. È inoltre definita un'osservabile rappresentata dall'operatore

$$O = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con α constante reale.

1) Discutere la possibilità che esista un insieme di autostati comuni per gli operatori H e O e, in caso affermativo, determinarli insieme ai relativi autovalori.

2) Al tempo $t = 0$ una misura dell'osservabile associata ad O dà come risultato il valore più basso ammesso. Determinare l'evoluzione temporale dello stato per $t > 0$.

3) Determinare la probabilità, in funzione del tempo, che una misura di O dia come risultato l'autovalore maggiore. Si determini inoltre la stessa probabilità per H.

Esercizio II. Un sistema descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha L_z$$

si trova in uno stato con $\ell = 1$. Al tempo $t = 0$, il sistema si trova in un autostato dell'operatore

$$\frac{L_x + L_z}{\sqrt{2}}$$

con autovalore $\hbar$.

1) Determinare lo stato al tempo $t = 0$ in funzione degli autostati $|\ell\ m>$ di L^2 e L_z .

2) Calcolare l'evoluzione temporale dello stato e di $< L_z >, < L_x >$ e $< L_y >$.

Esercizio III. Una particella è confinata in una buca impenetrabile quadrata in due dimensioni, di lato a. Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi(x, y) = \mathcal{N} \left[\left(\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right]$$

Calcolare al tempo t:

1) La dispersione dei risultati per una misura di energia.

2) I possibili valori di una misura di $\frac{p_x^2}{2m}$ e $\frac{p_y^2}{2m}$

3) La buca viene improvvisamente raddoppiata nella sola direzione x. Discutere i livelli energetici del nuovo sistema e i primi due stati eccitati. Determinare infine la probabilità che la particella si trovi nello stato finale con energia identica a quella dello stato fondamentale della buca quadrata.

Formule utili:

Operatori di innalzamento ed abbassamento per momento angolare:

$$L_\pm |\ell, m> = \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m \pm 1)} |\ell, m \pm 1>$$

Autofunzioni particella in una buca con pareti infinite $x \in [0, a]$:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$