

Esercizi 2

Carlo Oleari

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno sempre penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

Date le funzioni

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dimostrare che

$$\int_0^a dx \phi_m(x) \phi_n(x) = \delta_{nm}$$

Problema 2

a) Determinare il cambio di coordinate $(x_1, x_2) \rightarrow (x'_1, x'_2)$ tale che

$$\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} + a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + a x_2^2$$

diventi

$$\frac{d^2}{dx_1'^2} + \frac{d^2}{dx_2'^2} + f x_1'^2 + g x_2'^2$$

e calcolare f e g in funzione di a e b .

b) Determinare il cambio di coordinate $(x_1, x_2) \rightarrow (x'_1, x'_2)$ tale che

$$a \frac{d^2}{dx_1^2} + 2 b \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dx_2} + a \frac{d^2}{dx_2^2} + x_1^2 + x_2^2$$

diventi

$$f \frac{d^2}{dx_1'^2} + g \frac{d^2}{dx_2'^2} + x_1'^2 + x_2'^2$$

e calcolare f e g in funzione di a e b .

Suggerimento: Scrivere in forma matriciale le espressioni sulle quali operare il cambio di variabili.