Esercizi 1

Carlo Oleari

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno sempre penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

L'evoluto temporale della funzione d'onda di una particella libera avente una distribuzione gaussiana di momenti centrati intorno al valore k_0, in una dimensione, è dato da

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \exp\left[-\frac{\alpha^2}{4}(k-k_0)^2\right] \exp\left[i\left(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right)\right]$$

1. Verificare che $\Psi(x,t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger per una particella libera in una dimensione

2. Calcolare esplicitamente l'integrale in k e verificare che

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi\alpha^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+i\dfrac{2\hbar t}{m\alpha^2}}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2\left(x-\dfrac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{\alpha^4+\dfrac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right\}$$
$$\times \exp\left\{i\,\frac{k_0 x + \dfrac{\hbar\, t}{2m}\left(\dfrac{4x^2}{\alpha^4}-k_0^2\right)}{1+\dfrac{4\hbar^2t^2}{m^2\alpha^4}}\right\}$$

dalla quale segue che

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4\hbar^2t^2}{m^2\alpha^4}}} \exp\left\{-\frac{2\alpha^2\left(x-\dfrac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{\alpha^4+\dfrac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right\}$$

3. Verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = 1$$

ed è quindi indipendente dal tempo.

4. Ricordando che

$$\langle x\rangle \equiv \int dx\, x\, |\Psi(x,t)|^2$$
$$\langle x^2\rangle \equiv \int dx\, x^2\, |\Psi(x,t)|^2$$

e che lo scarto quadratico medio è definito da

$$(\Delta x)^2 \equiv \int dx\ (x - \langle x \rangle)^2 \, |\Psi(x,t)|^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \,,$$

calcolare $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e Δx per la funzione d'onda in questione.
Verificare che

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \frac{\hbar k_0 t}{m} \\
\langle x^2 \rangle &= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + k_0^2 \right) \\
\Delta x &= \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \alpha^4}}
\end{aligned}$$