Esercizi 1

Carlo Oleari

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno sempre penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

L'evoluto temporale della funzione d'onda di una particella libera avente una distribuzione gaussiana di momenti centrati intorno al valore k_0, in una dimensione, è dato da

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \exp\left[-\frac{\alpha^2}{4}(k-k_0)^2\right] \exp\left[i\left(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right)\right]$$

1. Verificare che $\Psi(x,t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger per una particella libera in una dimensione
2. Calcolare esplicitamente l'integrale in k
3. Verificare che

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4\hbar^2 t^2}{m^2\alpha^4}}} \exp\left\{-\frac{2\alpha^2\left(x - \dfrac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{\alpha^4 + \dfrac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right\}$$

4. Verificare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\Psi(x,t)|^2 = 1$$

   ed è quindi indipendente dal tempo.

5. Ricordando che

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &\equiv \int dx \, x \, |\Psi(x,t)|^2 \\ \langle x^2 \rangle &\equiv \int dx \, x^2 \, |\Psi(x,t)|^2 \end{aligned}$$

   e che lo scarto quadratico medio è definito da

$$(\Delta x)^2 \equiv \int dx \, (x - \langle x \rangle)^2 \, |\Psi(x,t)|^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 ,$$

   calcolare $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e Δx per la funzione d'onda in questione.