

Distribuzione δ

Carlo Oleari

La δ di Dirac è una distribuzione (o funzione generalizzata) definita dal seguente integrale

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0), \quad a < x_0 < b \quad (1)$$

dove $f(x)$ è una funzione sufficientemente regolare nell'intorno di x_0 . Inoltre, x_0 deve appartenere all'intervallo di integrazione. Altrimenti l'integrale è zero.

Dalla (1) segue immediatamente che

$$\int dx \delta(x - x_0) = 1$$

e, con un semplice cambio di variabili nell'integrale, che

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

A partire dall'eq. (1), possiamo anche dare un significato alle derivate della delta. Per esempio, integrando per parti, ($a > 0$)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) &= \int_{-a}^a dx \frac{d}{dx} [f(x) \delta(x)] - \int_{-a}^a dx \frac{df(x)}{dx} \delta(x) \\ &= - \int_{-a}^a dx \frac{df(x)}{dx} \delta(x) = - \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} \end{aligned} \quad (2)$$

Dalla (1) e (2), si ha quindi

$$\int_{-\infty}^x dy \delta(y - a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases} \equiv \theta(x - a)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx} \theta(x - a) = \delta(x - a)$$

Importante identità

Dimostrare la più generale relazione (molto importante!)

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|dg/dx(x_i)|}$$

dove gli x_i sono le radici (semplici) di $g(x)$ nell'intervallo di integrazione.

“Rappresentazioni” della δ

In generale, ogni funzione “molto piccata”, normalizzata a 1 e con la larghezza che va a zero, può essere usata come “rappresentazione” della distribuzione δ .

Dimostrare le seguenti identità:

1.

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(x, \epsilon) \quad (3)$$

dove

$$R(x, \epsilon) = \begin{cases} 0 & x < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < x < \epsilon \\ 0 & x > \epsilon \end{cases} \quad (4)$$

2.

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \quad (5)$$

3.

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (6)$$

4.

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) \quad (7)$$

5.

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\pi \alpha x^2} \quad (8)$$

6.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = \text{VP} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \quad (9)$$

dove “VP” indica l’integrazione fatta in Valor Principale, ovvero, se $a < 0 < b$

$$\text{VP} \int_a^b dx \frac{1}{x} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{-\epsilon} dx \frac{1}{x} f(x) + \int_{\epsilon}^b dx \frac{1}{x} f(x) \right\}$$

Esercizio

$$I(a, b) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\delta(1-x-y)}{(ax+by)^2}$$

Esercizio

$$I(a, b, c) = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\delta(1-x-y-z)}{(ax+by+cz)^3}$$

Esercizio

$$I(a, b, c) = 6 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz y \frac{\delta(1-x-y-z)}{(ax+by+cz)^4}$$

Esercizio

$$I(a, b) = \int_a^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\log(k^2)} \frac{1}{y(1-x-y)} \theta(k^2 - b^2)$$

dove

$$k^2 = \frac{y}{x}(1-x-y)$$

Suggerimento: provate ad inserire

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk^2 \delta\left(k^2 - \frac{v}{x}(1-x-v)\right)$$

Parametrizzazione di Feynman

La seguente è un'identità **molto** utile in teoria di campo. Dimostrare che

$$\frac{1}{D_1 D_2 \dots D_n} = (n-1)! \int_0^1 \prod_{i=1}^n d\alpha_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k D_k\right)^n}$$

1. per induzione,
2. senza usare l'induzione.

Esercizio

Calcolate, fino al primo ordine in ϵ , il seguente integrale, usando eventualmente metodi numerici per calcolare i diversi coefficienti dell'espansione in ϵ

$$\int_0^1 dx \frac{e^x}{x^{1+\epsilon}}.$$

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari

Esercizio

Si consideri una spira percorsa da una corrente i immersa in un campo magnetico \mathbf{B}

1. Definire il momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ della spira.
2. Ricavare, magari facendo riferimento ad una forma particolare per la spira, che l'espressione per l'energia potenziale di tale spira è data da

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

Esercizio

Si consideri un elettrone di un cristallo paramagnetico immerso in un campo magnetico \mathbf{B} . Si considerino solo i suoi gradi di libertà di spin. L'Hamiltoniana che descrive tale sistema è quindi data da

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

dove

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{|e|}{2m} \mathbf{S}$$

dove \mathbf{S} è lo spin dell'elettrone. Si immagini ora che \mathbf{B} abbia due componenti: una molto intensa, B_0 , costante e uniforme lungo l'asse delle z , e una componente debole, oscillante nel tempo, lungo l'asse delle ascisse, $B_1 \cos(\omega t)$. Supponendo che all'istante iniziale l'elettrone sia nello stato $|+\rangle$, calcolare la probabilità, in funzione del tempo, di avere spin flipping.

Suggerimento: non risolvere il sistema di equazioni differenziali nel caso più generale possibile, ma solo nella condizione in cui $\omega \approx 2\omega_0$, dove

$$\omega_0 = \frac{g|e|B_0}{4m},$$

cosicché vale l'approssimazione

$$\cos(\omega t) e^{2i\omega_0 t} = \frac{1}{2} [e^{i(2\omega_0 + \omega)t} + e^{i(2\omega_0 - \omega)t}] \approx \frac{1}{2} e^{i(2\omega_0 - \omega)t}$$

dove si è trascurato il termine rapidamente oscillante.

Esercizio

Scrivere l'operatore

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) .

Esercizio

1. Verificare, fino al terzo ordine, la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(A)\exp(B) = \exp \left\{ A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A, [A, B]] - \frac{1}{12} [B, [A, B]] - \frac{1}{24} [B, [A, [A, B]]] + \dots \right\}$$

dove A e B sono generici operatori.

2. Stessa verifica per la formula di Zassenhaus

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp\left\{-\frac{1}{2}[A, B]\right\}\exp\left\{\frac{1}{6}(2[B, [A, B]] + [A, [A, B]])\right\}\exp\left\{-\frac{1}{24}([[[A, B], A], A] + 3[[[A, B], A], B] + 3[[[A, B], B], B])\right\}\dots$$

Esercizio

1. Ricavare esplicitamente $R_1(\alpha)$, $R_2(\beta)$ e $R_3(\gamma)$, le 3 matrici che realizzano una rotazione finita di un generico vettore nello spazio tridimensionale attorno al corrispondente asse cartesiano ($1 = x, 2 = y, 3 = z$).
2. Sia $R_{\vec{n}}(\omega)$ la matrice che rappresenta una rotazione di un generico vettore in 3 dimensioni di un angolo ω attorno al versore \vec{n} , di coordinate polari θ e ϕ . Esprimere $R_{\vec{n}}(\omega)$ come prodotto delle matrici precedenti. Quante ne occorrono come minimo?
3. Per rotazioni infinitesime, si definisca

$$R_k(\delta\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\theta J_k + \mathcal{O}(\delta\theta^2) \quad k = 1, 2, 3.$$

Ricavare esplicitamente le matrici J_k e i loro commutatori.

Esercizio

Ricavare lo spettro degli autostati del momento angolare, con tutti i dettagli che il calcolo richiede.

Esercizio

Si consideri una particella quantistica di spin 1. Usando come rappresentazione degli

operatori di momento angolare le tre matrici ottenute in un esercizio precedente, calcolare esplicitamente l'operatore unitario che realizza una rotazione finita attorno all'asse y

$$R_2(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} J_2 \theta\right)$$

Esercizio

Nella base standard in cui J_z è diagonale

1. calcolare i 3 autostati di J_x ($|J_x = +1\rangle, |J_x = 0\rangle, |J_x = -1\rangle$) in termini di quelli di J_z
2. ottenere lo stato $|J_x = +1\rangle$ ruotando opportunamente lo stato $|J_z = +1\rangle$ e confrontarlo col risultato del punto precedente.

Esercizio

La generica rotazione di un angolo ω attorno ad un versore \vec{n} , di coordinate polari θ e ϕ , può essere espressa dal prodotto delle seguenti matrici di rotazione

$$R_{\vec{n}}(\omega) = R_z(\phi) R_y(\theta) R_z(\omega) R_y(-\theta) R_z(-\phi).$$

Usando invece i tre angoli di Eulero, la stessa matrice di rotazione può essere scritta come

$$R_{\vec{n}}(\omega) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma).$$

Derminare α , β e γ in funzione di θ , ϕ e ω . Assicurarsi di aver trovato la “più semplice” dipendenza funzionale possibile.

In caso fosse necessario, usare un programma di manipolazione algebrica di matrici per calcolare i prodotti sopra indicati.

Esercizio

1. Due particelle quantistiche senza spin sono descritte dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(|\mathbf{r}_1|) + V(|\mathbf{r}_2|)$$

Mostrare che i due momenti angolari orbitali \mathbf{L}_1 ed \mathbf{L}_2 sono separatamente costanti del moto

2. Se è presente un potenziale tra le particelle, funzione solo della distanza tra le due particelle, ovvero se l'Hamiltoniana è data da

$$H = H_0 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

mostrare che nè \mathbf{L}_1 nè \mathbf{L}_2 sono costanti del moto, ma che il momento angolare totale $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ lo è

Esercizio

Dare una rappresentazione dei tre operatori del momento angolare intrinseco per una particella di spin 2 (ovvero determinare tre matrici 5×5 che soddisfano la relazione di commutazione dei momenti angolare)

Esercizio

Scrivere la più generica matrice appartenente ad $U(2)$, ovvero la più generica matrice complessa unitaria 2×2 . Che ulteriore condizione devono soddisfare gli elementi della matrice perché appartenga ad $SU(2)$, ovvero abbia determinante uguale ad 1?

Esercizio

Sia A un operatore scalare, ovvero $[A, \hat{\mathbf{J}}] = 0$. Dimostrare (senza usare il teorema di Wigner-Eckart) che

$$\langle k', j', m' | A | k, j, m \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} a(k, k', j)$$

dove $|k, j, m\rangle$ è autostato del momento angolare J^2 e J_z ma NON è necessariamente autostato di A .

Esercizio

La parte dipendente dallo spin dell'Hamiltoniana di un sistema di 2 particelle dotate di spin è dato da

$$H_S = A + \frac{B}{\hbar^2} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{C}{\hbar} (S_{1z} + S_{2z})$$

Determinare autostati e autovalori del sistema quando:

1. entrambe le particelle hanno spin 1/2 e sono identiche (principio di esclusione di Pauli)
2. una delle particelle ha spin 1/2 e l'altra spin 1.

Esercizio

Sia $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3$ il momento angolare totale di tre particelle di spin 1/2 (trascuriamo i gradi di libertà orbitali). Sia $|\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\rangle$ l'autostato comune a S_{1z} , S_{2z} e S_{3z} con autovalore $\epsilon_1 \hbar/2$, $\epsilon_2 \hbar/2$ e $\epsilon_3 \hbar/2$.

1. Determinare una base comune a S^2 e S_z , in termini dei $|\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\rangle$.
2. S^2 e S_z formano un set completo, limitatamente allo spazio complessivo dei tre spin di osservabili? In caso di risposta negativa, come si può completare tale sistema?

Esercizio

Si consideri una particella (a) di spin 3/2 che può disintegrarsi per via di interazioni forti

(e quindi conserva la parità) in 2 particelle: (b) di spin 1/2 e (c) di spin 0. Ci si ponga nel sistema a riposo della particella (a). Non si ha alcuna informazione sulla parità intrinseca della particella (a), mentre si sa che le altre due hanno parità pari.

1.
 - Quali valori del momento orbitale angolare può assumere il sistema delle due particelle finali?
 - Cosa succederebbe se lo spin della particella (a) fosse maggiore di 3/2?
2. Si assuma ora che la particella (a) abbia momento angolare definito lungo l'asse z pari a $m_a \hbar$. È possibile determinare la parità intrinseca della particella (a) misurando le probabilità di trovare la particella (b) nello stato con spin parallelo o antiparallelo all'asse z ?

Si ricorda che la parità totale è data dal prodotto delle parità intrinseche e della parità derivante dai gradi di libertà spaziali.

Esercizio

Si consideri il sistema **classico** di due rotatori rigidi, di momento d'inerzia I_1 e I_2 rispettivamente, accoppiati dal potenziale

$$V = a \vec{\mathcal{J}}_1 \cdot \vec{\mathcal{J}}_2$$

dove $\vec{\mathcal{J}}_1$ e $\vec{\mathcal{J}}_2$ sono i due momenti angolari. Scrivere le equazioni del moto e descrivere col massimo dettaglio il comportamento di questo sistema.

Esercizio

Si considerino le funzioni armoniche sferiche $Y_l^m(\theta, \phi)$.

1. Verificare che costituiscono un tensore sferico irriducibile di rango l .
2. Per tale tensore, scrivere in esplicito (come funzioni di θ e ϕ e relativi integrali) il teorema di Wigner-Eckart.

Esercizio

Si consideri una particella vincolata da potenziale centrale dipendente solo da r (considerare tutte le costanti del moto!)

1. Mettere il più possibile in relazione gli elementi di matrice

$$\langle n', l', m' | \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm iy) | n, l, m \rangle \quad \text{e} \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle$$

usando **solo** il teorema di Wigner-Eckart. In particolare, elencare e commentare in dettaglio sotto quali condizioni gli elementi di matrice sono diversi da zero.

2. Rispondere alla stessa domanda usando la funzione d'onda

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Esercizio

Si consideri il decadimento **elettrodebole** (e quindi **non** conserva la parità) della particella Λ^0 in un protone p e in un pione π^-

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

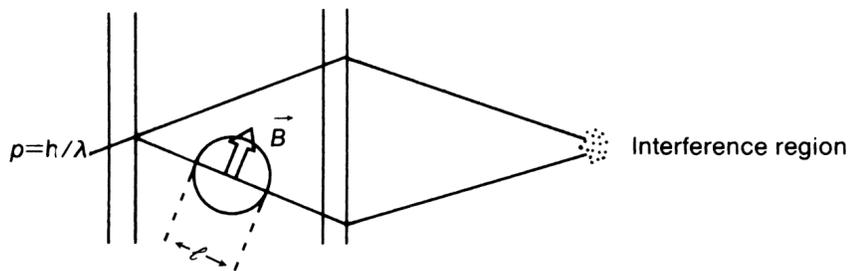
Sappiamo, da altri esperimenti, che sia il protone che la Λ^0 hanno spin $1/2$ ed entrambi hanno parità intrinseca $+$, mentre il pione ha spin 0 e parità intrinseca $-$. Supponiamo di produrre la Λ^0 polarizzata $+1/2$ rispetto ad un asse.

1. Qual è la più generale distribuzione angolare dei prodotti di decadimento? Ci si metta nel sistema di riposo della Λ^0 .
2. Se invece la parità si fosse conservata, che distribuzione angolare si sarebbe ottenuto?
3. Se si misurassero anche le probabilità di avere un protone con spin $+1/2$ o $-1/2$ **lungo l'asse del decadimento**, che distribuzioni angolari avrebbero?

Si ricorda che la parità totale è data dal prodotto delle parità intrinseche e della parità derivante dai gradi di libertà spaziali.

Interludio fisico

Si consideri l'interferometro a neutroni illustrato in figura. Dimostrate che la differenza



nei valori dei campi magnetici che produce due massimi successivi nel conteggio di neutroni nella regione dell'interferenza è dato da

$$\Delta B = \frac{4\pi\hbar c}{|e|g_n/\lambda\ell}$$

dove $g_n = -1.91$ è il momento magnetico del neutrone in unità di $-\hbar/(2m_n c)$.

Esercizio

Si consideri una particella di carica q e massa m vincolata a muoversi in un potenziale centrale $V(r)$, prodotto da una carica fissa $-q$ (massa molto pesante M), e in presenza di un campo magnetico costante \mathbf{B} .

1. Trascurando tutti i momenti magnetici, si scriva l'Hamiltoniana H di tale sistema, in termini di V e \mathbf{B} , **non** assumendo che \mathbf{B} sia allineato lungo un particolare asse. Precisare il gauge usato.
2. Come cambia H nel caso in cui la particella ha momento magnetico

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S}$$

dove \mathbf{S} è lo spin della particella e e la carica del protone?

3. Come cambia H se anche la particella fissa ha momento magnetico

$$\boldsymbol{\mu}' = g' \frac{e}{2M} \mathbf{S}'$$

dove \mathbf{S}' è lo spin della particella fissa? Si ricorda che un momento magnetico genera un ulteriore campo magnetico, e la particella in moto ne sente l'effetto.

Giustificare le risposte derivando le formule dall'elettrodinamica classica, partendo da una base minima di conoscenze che generalmente si reputano acquisite dopo l'esame di Fisica II.

Esercizio

La densità di corrente è definita dal fatto che una variazione del potenziale \mathbf{A} induce una variazione di energia

$$\langle \delta H \rangle = - \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{A}$$

dove l'Hamiltoniana di una particella dotata di momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ è data da

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

1. Ricavare la densità di corrente \mathbf{J}
2. Partendo dall'equazione di Schrödinger, verificare che la densità di corrente così ricavata soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

dove $\rho = q\psi^*\psi$ è la densità di carica.

Esercizio

Si consideri l'Hamiltoniana di una particella di carica q e massa m in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e dal potenziale scalare $\Phi(\mathbf{x})$

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi = \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + q\Phi$$

Usando il teorema di Ehrenfest, derivare l'equivalente quantistico della forza di Lorentz.

Esercizio

N particelle identiche di spin $1/2$ sono soggette ad un potenziale armonico monodimensionale. Qual è l'energia dello stato fondamentale? Qual è l'energia di Fermi?

Esercizio

È noto che due particelle diverse di spin 1 nello stato orbitale s possono formare stati con momento $J = 0, 1$ o 2 . Se le particelle fossero identiche, che restrizioni si ottengono?

Esercizio

Si considerino 3 particelle identiche, debolmente interagenti, di spin 1 .

1. Supponiamo che la parte spaziale del vettore di stato sia simmetrico sotto lo scambio di una qualunque coppia. Usando la notazione $|m_1 m_2 m_3\rangle$, dove m_i è la componente del momento angolare lungo un asse di riferimento, con $m_i = \{+, 0, -\}$, si costruiscano gli stati normalizzati nei seguenti tre casi:
 - (a) tutte e tre sono nello stato $|+\rangle$
 - (b) due di loro sono nello stato $|+\rangle$ e una in $|0\rangle$
 - (c) tutte e tre in diversi stati di spin
2. In ciascuno dei 3 casi precedenti, qual è lo spin **totale** del sistema? Qualora il sistema sia in una sovrapposizione di stati di spin diverso, calcolare la frazione dei diversi contributi.
3. Rispondere alle stesse domande qualora la parte spaziale sia antisimmetrica rispetto allo scambio di una qualunque coppia di particelle.

Esercizio

Due fermioni identici di spin $1/2$ si muovono in una buca monodimensionale con pareti infinite: $V = \infty$ per $x < 0$ e $x > L$, $V = 0$ per $0 < x < L$.

1. Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale e l'energia dello stato fondamentale quando le due particelle sono forzate ad essere nello stato di spin di tripletto

2. Stessa domanda nel caso in cui lo stato di spin sia di singoletto
3. Si supponga che le due particelle interagiscano attraverso un potenziale attrattivo a corto raggio, che può essere schematizzato da

$$V = -\lambda \delta(x_1 - x_2) \quad \lambda > 0.$$

Assumendo che la teoria delle perturbazioni sia valida anche con questo potenziale così singolare, si discuta cosa succede ai livelli energetici ottenuti in 1 e 2.

Esercizio

Si consideri una particella carica in un potenziale armonico in una dimensione. Si accenda un campo elettrico debole \mathcal{E} , cosicché il potenziale è modificato per una quantità $H' = -q\mathcal{E}x$

1. Calcolare lo shift in energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine
2. Risolvere il problema **esattamente** e comparare il risultato col precedente.

Esercizio

Un oscillatore armonico monodimensionale di massa m e frequenza ω viene perturbato da un potenziale $V = \alpha x^3$. Calcolare la prima correzione diversa da zero allo stato fondamentale.

Esercizio

Si consideri un elettrone in un campo Coulombiano, centrato nell'origine delle coordinate. Trascurando tutti gli effetti di spin e le correzioni relativistiche, è noto che il primo stato eccitato ($n = 2$) sia quattro volte degenere. Si consideri cosa capita a questo livello in presenza di un potenziale non centrale V , da ritenersi piccolo rispetto a quello Coulombiano

$$V = V_0 \frac{xy}{r^2}.$$

Al primo ordine nello sviluppo perturbativo, discutere i livelli perturbati, la loro energia e il grado di degenerazione.

Esercizio

Un rotatore rigido quantistico è vincolato a muoversi in un piano fisso. Rispetto all'asse di rotazione (che è ovviamente perpendicolare al piano) il suo momento d'inerzia è I . Inoltre, il rotatore è dotato di momento di dipolo elettrico \mathbf{d} , nel piano di rotazione

Il rotatore è soggetto ad un campo elettrico \mathcal{E} con sole componenti nel piano fisso. Trattando il campo elettrico come una perturbazione, calcolare le energie dei primi tre stati all'ordine \mathcal{E}^2 (in totale 5 stati, contando le degenerazioni).

Suggerimento. Affrontare il problema partendo dall'espansione della funzione d'onda e dell'energia in serie di potenze nel parametro perturbativo. Mantenere una notazione generale fino ad avere la correzione al secondo ordine dell'energia. A questo punto, inserire esplicitamente i valori corrispondenti per lo stato fondamentale e per i primi due eccitati.

Esercizio

Esprimere in unità naturali ($\hbar = 1$, $c = 1$) le unità fondamentali del sistema MKS, ovvero metro, secondo e chilogrammo. Si ricorda che

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.5822 \times 10^{-22} \text{ MeV s} & c &= 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \\ e &= 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C} & \epsilon_0 &= 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \end{aligned}$$

Sempre in unità naturali, dare il valore della massa dell'elettrone ($m_e = 9.1096 \times 10^{-28} \text{ g}$), scrivere l'espressione della costante di struttura fine (α) e del raggio di Bohr e **calcolarne** il valore per entrambi. Controllare la corretta dimensionalità delle espressioni. Inoltre, calcolare il valore del magnetone di Bohr, $\mu_B = e\hbar/(2m)$ in unità eV/T [T=Tesla].

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} \quad (10)$$

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} mc^2 (\alpha)^2 \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{m c \alpha} \quad (12)$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T} \quad 1\text{T} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Kg}}{\text{Cs}} \quad (13)$$

Esercizio

Si consideri la seguente Hamiltoniana approssimata per descrivere un atomo di idrogeno

$$H = H_0 + H_f + H_{hf}$$

dove

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

e i termini di struttura fine e iperfine sono dati rispettivamente da

$$H_f = \underbrace{-\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}}_{H_k} + \underbrace{\frac{g-1}{2m^2c^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}_{H_{SO}} + \underbrace{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\mathbf{r})}_{H_D}$$

e

$$H_{hf} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{q}{m r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}_I + \frac{1}{r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r})(\mathbf{M}_I \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{M}_I \right] + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{M}_I \delta(\mathbf{r}) \right\}$$

dove q è la carica elettrica dell'elettrone, μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto (si ricorda che $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$) e \mathbf{M}_S e \mathbf{M}_I sono i momenti magnetici dell'elettrone e del protone rispettivamente

$$\mathbf{M}_S = \frac{gq}{2m} \mathbf{S} \qquad \mathbf{M}_I = \frac{g_p q_p}{2M_p} \mathbf{I}$$

Con \mathbf{I} si è indicato lo spin del protone, che ha carica $q_p = -q$ e rapporto giromagnetico $g_p \simeq 5.585$, e con g il rapporto giromagnetico dell'elettrone $g \simeq 2$.

1. Valutare numericamente gli ordini di grandezza dei termini H_0 , H_f e H_{hf} e giustificare quindi l'uso della teoria delle perturbazione per descrivere gli ultimi due termini
2. Calcolare le correzioni allo stato fondamentale $n = 1$ dell'atomo di idrogeno (ovvero lo stato fondamentale di H_0) dovuti alla struttura fine e iperfine, e darne i valori **numerici** in elettronvolt.
3. Calcolare le correzioni agli stati con $n = 2$ dovuti alla struttura fine. Darne i valori **numerici** in elettronvolt.
4. Dare una descrizione qualitativa di ciò che succede agli stati con $n = 2$ qualora si consideri, oltre ad H_f , anche il termine di struttura iperfine H_{hf} . Provare a ricavare anche delle valutazioni quantitative.

Esercizio

Una particella di spin 1 è descritta dall'Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{E_0}{\hbar^2} S_z^2$$

dove S_z è la matrice diagonale che rappresenta la componente dell'operatore di spin lungo l'asse z . Si consideri il sistema precedente perturbato da

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 \\ v_1^* & 0 & v_2 \\ 0 & v_2^* & 0 \end{pmatrix}$$

dove v_1 e v_2 sono da considerarsi "piccoli" rispetto ad E_0 .

1. Diagonalizzare **esattamente** il sistema $H_0 + V$.
2. Usare la teoria delle perturbazioni al secondo ordine per ricavare le correzioni ai valori dell'energia. Confrontare i risultati così ottenuti col punto precedente.

Esercizio

Stimare l'energia dello stato fondamentale di un oscillatore armonico monodimensionale usando come funzione "prova"

$$\Psi(x) = \exp(-\beta|x|),$$

dove β è il parametro variabile.

Esercizio

Si consideri un oscillatore armonico monodimensionale di frequenza ω_0 . Per tempi $t < 0$ l'oscillatore si trova nello stato fondamentale. A tempi $t > 0$ si accende un potenziale

$$V(t) = F_0 x \cos(\omega t),$$

con F_0 costante. Usando la teoria delle perturbazioni, calcolare il valore di aspettazione $\langle x \rangle$ in funzione del tempo, all'ordine perturbativo più basso diverso da 0. Commentare in dettaglio cosa succede se $\omega \approx \omega_0$.

Esercizio

Un atomo di idrogeno nello stato fondamentale $|1, 0, 0\rangle$ è posto tra le armature di un condensatore che, pilotato da un potenziale esterno, produce all'interno delle armature il campo elettrico

$$\mathcal{E} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \mathcal{E}_0 \exp(-t/\tau) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

con \mathcal{E}_0 nella direzione positiva dell'asse z . Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine

1. calcolare la probabilità di trovare l'atomo in ognuno dei 3 stati $2p$, per tempi $t \gg \tau$
2. calcolare la probabilità di trovare l'atomo nello stato $2s$.

Esercizio

Si consideri un sistema di due particelle diverse di spin $1/2$. Per $t < 0$ l'Hamiltoniano non dipende dallo spin e può essere assunto 0 aggiustando opportunamente il livello di riferimento di misura dell'energia. Per $t > 0$ l'Hamiltoniano è dato da

$$H = \frac{E_0}{\hbar^2} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

Il sistema si trova nello stato $|+-\rangle$ a $t \leq 0$. Determinare, in funzione del tempo, le probabilità di trovare il sistema in ognuno dei seguenti 4 stati: $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-\rangle$ e $|--\rangle$:

1. risolvendo **esattamente** il problema
2. risolvendo il problema assumendo la validità della teoria perturbativa al primo ordine, trattando H come perturbazione. Sotto quali condizioni i risultati perturbativi danno i risultati corretti?

Atomo di idrogeno classico

Si consideri l'Hamiltoniano classico per l'atomo di idrogeno

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{r}$$

1. Scrivere le equazioni del moto per \mathbf{r} e \mathbf{p} .
2. Mostrare che il momento angolare \mathbf{L} è una costante del moto. La conseguenza di ciò è che il moto avviene in un piano, perpendicolare alla direzione di \mathbf{L} .
3. Esiste anche un altro vettore costante del moto, il vettore di Runge-Lenz

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{v} \times \mathbf{L} - q^2 \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Dimostrare \mathbf{M} che è perpendicolare a \mathbf{L} (e quindi è nel piano dell'orbita) e che è costante del moto.

4. Dimostrare che \mathbf{M} è allineato lungo l'asse maggiore dell'ellisse. Suggerimento: calcolare $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}$.

Atomo di idrogeno quantistico

1. Determinare l'equivalente quanto-meccanico del vettore classico \mathbf{M} (ricordarsi che \mathbf{M} deve essere hermitiano)
2. Dimostrare che \mathbf{M} è un vettore, ovvero

$$[L_i, M_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} M_k$$

3. Dimostrare che $[H, \mathbf{M}] = 0$, ovvero che \mathbf{M} è costante del moto.
4. Dimostrare che

$$[M_i, M_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} \left(-\frac{2H}{m} \right) L_k$$

Quindi i sei operatori \mathbf{L} e \mathbf{M} si chiudono sotto le regole di commutazione, formando un'algebra più grande di $\text{SO}(3)$ (ovviamente gli L_i soddisfano $[L_i, L_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} L_k$).

5. Si definiscano i seguenti vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &\equiv \left(-\frac{2H}{m} \right)^{-1/2} \mathbf{M} \\ \mathbf{J}^{(1)} &\equiv \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{M}') \\ \mathbf{J}^{(2)} &\equiv \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{M}') \end{aligned} \tag{14}$$

Dimostrare che

$$\begin{aligned} \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)} \right] &= i \hbar \epsilon_{ijk} J_k^{(1)} \\ \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)} \right] &= i \hbar \epsilon_{ijk} J_k^{(2)} \\ \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

e quindi $\mathbf{J}^{(1)}$ e $\mathbf{J}^{(2)}$ separatamente soddisfano l'algebra di SO(3), e commutano tra di loro.

6. Dimostrare inoltre che

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = 0 \quad (16)$$

e che

$$\mathbf{M}^2 = \frac{2H}{m} (\mathbf{L}^2 + \hbar^2) + q^4. \quad (17)$$

7. Dall'algebra (15) sappiamo che gli autovalori di $(\mathbf{J}^{(1)})^2$ e $(\mathbf{J}^{(2)})^2$ sono $\hbar^2 j_1(j_1 + 1)$ e $\hbar^2 j_2(j_2 + 1)$, dove j_1 e j_2 sono numeri interi o semi-interi. Dimostrare che l'eq. (16) impone $j_1 = j_2 \equiv j$

8. Moltiplicare l'eq. (17) per $(-2H/m)^{-1}$ e ricordando che

$$(\mathbf{M}')^2 + \mathbf{L}^2 = 2 \left\{ (\mathbf{J}^{(1)})^2 + (\mathbf{J}^{(2)})^2 \right\}$$

ricavare finalmente lo spettro energetico dell'atomo di idrogeno

$$E = -\frac{m q^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{(2j + 1)^2}$$

che è equivalente a

$$E = -\frac{m q^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

9. L'energia è indipendente dal numero quantico l . Discutere in dettaglio la degenerazione dell'energia in termini di l .

10. A proposito: che senso matematico ha nell'eq. (14) il termine $(-2H/m)^{-1/2}$? La radice quadrata che ne risulta è ben definita?