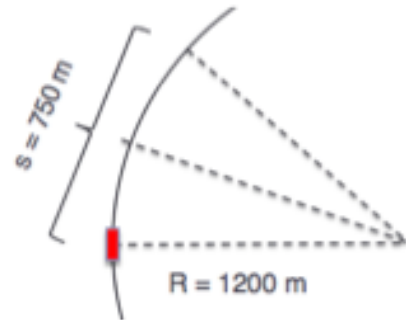


Problema 1:

Un carrello (approssimabile a un punto materiale) parte da fermo e procede con accelerazione tangenziale costante su un binario circolare di raggio di curvatura **$R=1200$ m**. Dopo aver percorso un arco di lunghezza **$s = 750$ m**, la velocità del carrello è in modulo **$v_1=15$ m/s**.



Si calcolino:

- il modulo della componente tangenziale dell'accelerazione,
- il modulo della velocità dopo un arco **$s/2$** dalla partenza
- l'accelerazione centripeta dopo un arco **$s/2$** dalla partenza.

Soluzione:

Possiamo scomporre il moto nelle componenti tangente e radiale lungo la traiettoria. La componente tangenziale dell'accelerazione è costante. Il vettore spostamento è sempre tangente alla traiettoria. Dunque lo spostamento lungo l'arco avviene con moto uniformemente accelerato con condizioni iniziali **$s_0=0$** e **$v_0=0$** .

- a) La legge oraria e la legge della velocità per il percorso lungo l'arco sono:

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = a t \quad \rightarrow \quad a = v^2 / 2s \quad (*)$$

$$\text{Dunque } a = (15 \text{ m/s})^2 / (2 \times 750 \text{ m}) = 0.15 \text{ m/s}^2$$

- b) Dalla relazione (*), risolvendo per **v** quando la posizione è **$s_2 = s/2$** , si ottiene:

$$v_2 = \sqrt{2as_2} = \sqrt{as} = \sqrt{0.15 \text{ m/s}^2 \cdot 750 \text{ m}} = 10.6 \text{ m/s}$$

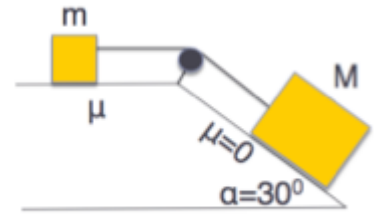
- c) L'accelerazione centripeta in **s_2** è:

$$a_c = v_2^2 / R = (10.6 \text{ m/s})^2 / 1200 \text{ m} = 0.094 \text{ m/s}^2$$

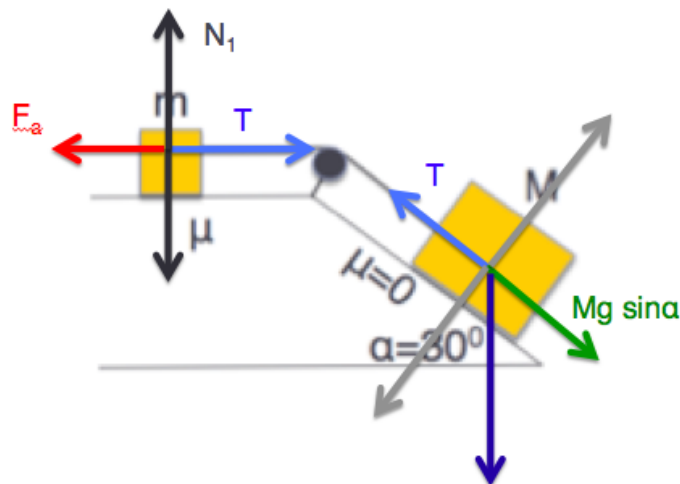
Problema 2:

Un corpo di massa m è posto su un piano orizzontale con attrito $\mu_s = \mu_d = \mu$ ed è collegato tramite un filo ed una carrucola ideali ad un corpo di massa M , posto su un piano senza attrito, inclinato di $\alpha = 30^\circ$ con l'orizzontale come in figura.

Si determini a) il minimo valore M_0 di M che consente alle masse di muoversi e b) l'accelerazione delle masse per $M > M_0$.



Soluzione:



Dal diagramma delle forze si riconosce che $|F_a| = \mu mg$.

Per il moto lungo i piani si ha accelerazione comune (filo inestensibile) e due equazioni dinamiche accoppiate:

$$T - F_a = ma$$

$$Mg \sin \alpha - T = Ma$$

Da cui, eliminando T : $Mg \sin \alpha - \mu mg = (m+M)a$, e risolvendo per a :

$$a = g (M \sin \alpha - \mu m) / (m+M)$$

$$a = g (M/2 - \mu m) / (m+M) \quad [\sin 30^\circ = 1/2]$$

Questa relazione risponde alla domanda b).

La minima massa affinché ci sia moto ($a \neq 0$) si ottiene ponendo $a=0$ a zero:

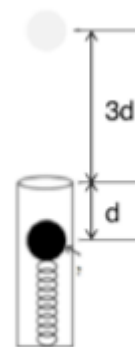
$$M_0 \sin \alpha - \mu m = 0$$

$$M_0 = \mu m / \sin \alpha = 2\mu m$$

che risponde ad a).

Problema 3:

Un fucile giocattolo a molla è usato per sparare un proiettile di massa $M=20\text{ g}$ in verticale. Il proiettile non è attaccato alla molla. La molla caricata è inizialmente contratta di una lunghezza $d=10\text{ cm}$ rispetto alla condizione di riposo. Dopo il rilascio il proiettile raggiunge un'altezza $3d$ sopra il punto di molla a riposo. Nell'ipotesi di attriti trascurabili, si trovino:



- la costante elastica della molla;
- La massima velocità del proiettile lungo la traiettoria e il punto dove essa viene raggiunta.

Soluzione

- a) Possiamo usare il teorema dell'energia cinetica (forze vive, per alcuni) tra il punto iniziale ($v_i=0$) e il punto più alto raggiunto dal proiettile ($v_f=0$) per scrivere:

$$W_{4d} = - (\Delta E_{P,peso} + \Delta E_{P,elastica}) = 0,$$

dove i due termini tra parentesi rappresentano la variazione dell'energia potenziale della forza peso e della forza elastica. Dalla relazione si ricava

$$\Delta E_{P,elastica} = - \Delta E_{P,peso}$$

Ricordando le espressioni per l'energia potenziale della forza elastica e della forza peso si ha:

$$0 - \frac{1}{2} k d^2 = - M g \Delta h = - 4 M g d.$$

Da cui si ricava la costante elastica:

$$k = 8 M g / d = (8 \cdot 20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2) / (0.1 \text{ m}) = 15.7 \text{ N/m}.$$

- b) La velocità è massima dove l'energia cinetica è massima, ossia dove l'energia potenziale è minima. Scriviamo l'espressione dell'energia potenziale in funzione della quota z , scegliendo l'asse z verticale, con verso in alto e con origine sulla punta del fucile, e $E_p(0) = 0$:

$$E_p(z) = M g z \quad z > 0$$

$$E_p(z) = M g z + \frac{1}{2} k z^2 \quad z < 0$$

L'energia potenziale ha un minimo nella regione $z < 0$:

$$dE_p/dz = k z + M g = 0$$

da cui si ricava la posizione dove la velocità è massima (che corrisponde alla condizione di accelerazione nulla, ossia di forze totale nulla):

$$\begin{aligned} z_m &= - M g / k \\ &= - (20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2) / (15.68 \text{ N/m}) \\ &= - 0.0125 \text{ m} \\ &= - 1.25 \text{ cm} \quad [\text{Il punto si trova } 1.25 \text{ cm prima della fine della canna}]. \end{aligned}$$

[In modo alternativo, si sarebbe potuta scrivere la legge del moto per il punto:

$$M a = -k z - M g \quad \text{per } z < 0$$

$$M a = -M g \quad \text{per } z > 0$$

Da queste relazioni si trova che l'accelerazione del proiettile è sempre negativa per $z > 0$, mentre può essere positiva per $z < 0$ e si annulla in $z_m = - M g / k$. Dunque il moto è accelerato nel primo tratto fino a z_m e poi decelerato. La velocità massima si raggiunge dove l'accelerazione è nulla.]

Il valore della velocità si ricava facendo ricorso alla conservazione dell'energia meccanica (e ricordando che l'energia cinetica è minima - nulla - quando la massa è ferma):

$$E_K^{\max} = \frac{1}{2} M v_{\max}^2 = E_P^{\max} - E_P^{\min}$$

L'energia potenziale è massima nei due punti estremi del moto, dove $E_K=0$: quando la molla è carica ($z = -d$) o quando il proiettile ha raggiunto la quota massima ($z=3d$). Usiamo quest'ultimo punto, perché ivi E_P ha un'espressione più semplice:

$$\begin{aligned} E_P^{\max} &= 3Mgd \\ &= 3 \cdot 20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.1 \text{ m} \\ &= 5.88 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

L'energia potenziale è minima in $z_m = -Mg/k$:

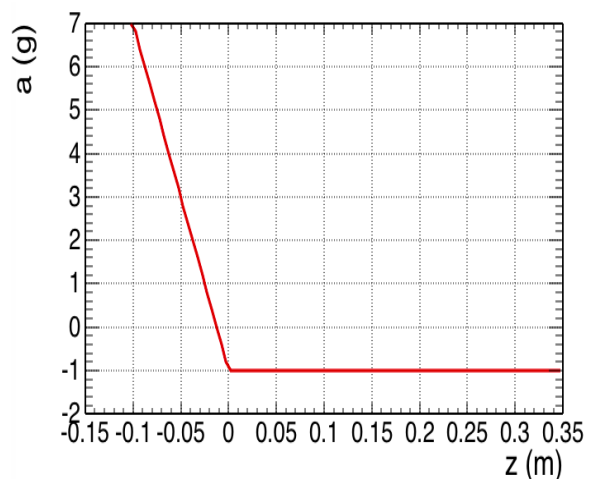
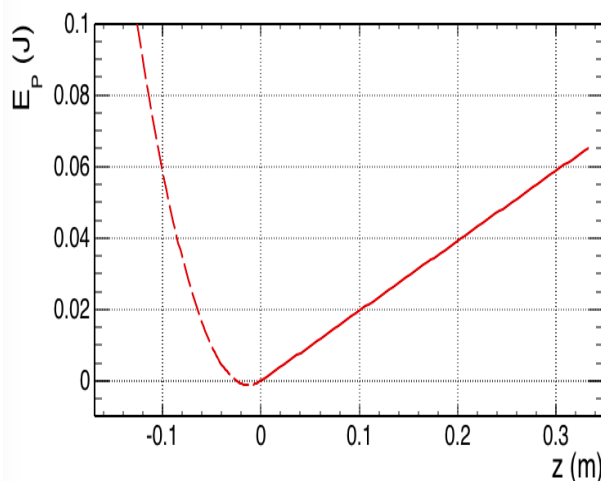
$$\begin{aligned} E_P^{\min} &= \frac{1}{2} k (Mg/k)^2 - Mg \cdot Mg/k \\ &= -\frac{1}{2} (Mg)^2 / k \\ &= -0.5 \cdot (20 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2)^2 / (15.68 \text{ N/m}) \\ &= -0.12 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= [2 \cdot (E_P^{\max} - E_P^{\min}) / M]^{1/2} \\ &= [2 \cdot (5.88 + 0.12) \times 10^{-2} \text{ J} / 20 \times 10^{-3} \text{ kg}]^{1/2} \\ &= 2.5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

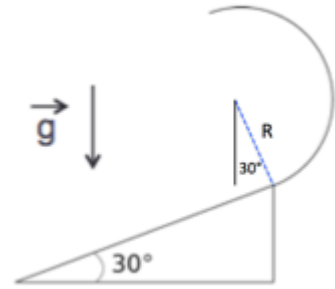
Commenti:

In figura si mostrano: l'andamento dell'energia potenziale (sx) e dell'accelerazione (dx) in unità di g in funzione della quota, usando i parametri del problema. La posizione del minimo coincide il punto di accelerazione nulla.



Problema 4:

a) Determinare la minima velocità v_L di lancio dalla base di un piano inclinato liscio di lunghezza $L=3.0$ m ed angolo $\alpha=30^\circ$ perché la massa percorra un giro completo senza staccarsi dalla guida circolare di raggio $R = 2.0$ m mostrata in figura, raccordata dolcemente con il piano.



b) Dopo aver sostituito il piano con una superficie scabra, la minima velocità affinché la massa percorra un giro completo è $v_s = 1.1 v_L$ (cioè maggiore di 1.1 volte). Si determini la forza di attrito radente del piano, per un oggetto di massa $m=1.0$ kg.

a) Nel punto più alto N è parallelo a g, e $N+mg = m v^2/R$ per cui $N > 0 \Rightarrow v^2 > Rg$

La differenza di quota dal punto di partenza al punto più alto è $\Delta h = L \sin(\alpha) + R(1 + \cos(\alpha))$. Per la conservazione dell'energia si ha (indicando con u la velocità iniziale)

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m u^2 - mg \Delta h \quad \text{ovvero} \quad v^2 = u^2 - 2g \Delta h$$

$$v^2 > Rg \Rightarrow u^2 > Rg + 2g \Delta h \quad \text{ossia}$$

$$u^2 > Rg + 2g (L \sin(\alpha) + R(1 + \cos(\alpha)))$$

$$> Rg (3 + 2 \cos(\alpha)) + 2Lg \sin(\alpha)$$

La minima velocità v_L è quindi: $v_L = \sqrt{Rg(3 + 2 \cos(\alpha)) + 2Lg \sin(\alpha)} = 11.1 \text{ m/s}$

b) la velocità minima nel punto più alto rimane la stessa del caso a, e la differenza di energia potenziale anche. Per cui la differenza di energia cinetica iniziale del caso b rispetto al caso a corrisponde al lavoro svolto dalla forza di attrito (indicato con W):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v_L^2 - \frac{1}{2} m v_s^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_L^2 - \frac{1}{2} m (1.1 v_L)^2 \\ &= -0.1 m v_L^2 \\ &= -12.2 \text{ J} \end{aligned}$$

Inoltre $W = -f_a \cdot L$ per cui $f_a = 0.1 m v_L^2 / L = 4.1 \text{ N}$

Commenti:

* Il coefficiente di attrito è: $\mu = F/mg \cos(\alpha) = 4.1 \text{ N} / (9.8 \text{ N} \cdot \sqrt{3}/2) = 0.48$

* Possiamo calcolare in modo esplicito il lavoro includendo il lavoro dell'energia potenziale, per verificare che si semplifica. La velocità minima velocità v nel punto più alto sarà data dalla relazione del punto a) $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_L^2 - mg \Delta h$ e inoltre $W = \Delta E$, ossia

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + mg \Delta h - \frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{1}{2} m v_L^2 - mg \Delta h + mg \Delta h - \frac{1}{2} m (1.1 v_L)^2 = -\frac{1}{2} \cdot 0.21 \cdot m v_L^2$$