Matematica per la Fisica

Alessandro Tomasiello

autunno 2009

Queste sono le mie note personali per il corso. Le ho preparate come promemoria per me stesso, e non perché venissero capite da altri. E' anche piuttosto probabile che vi troviate errori. Se scegliete di leggerle, lo fate quindi **a vostro rischio e pericolo.** Non sono da considerarsi in alcun modo "dispense ufficiali"; nel bene e nel male, conta quello che ho detto a lezione, e non quel che c'è scritto qui.

1 Introduzione; Lebesgue; convergenze

Il corso è diviso in due:

1. Spazi di Hilbert. In questa prima parte, impareremo a generalizzare l'algebra lineare a spazi infinito-dimensionali. Questo ci serve per la meccanica quantistica, e per altri problemi governati da equazioni lineari. Per esempio, ci serve per imparare cos'è una base, e uno "spettro".

2. Funzioni olomorfe. Si tratta dell'analogo di continuità per funzioni di $\mathbb{C}$. Questi metodi sono utilissimi praticamente in ogni campo del sapere. Per esempio, cambierà per sempre il modo in cui pensate agli integrali.

Gli spazi infinito-dimensionali presentano difficoltà peculiari; $v = \sum_n a_n v_n$ può non essere vero letteralmente. Ma faremo in modo che sia vero per quanto ci interessa.

La somma infinita può essere pensata come successione di funzioni. Dovremo quindi farci un po' di domande riguardo a successioni infinite di funzioni. Visto che il prodotto interno sarà un integrale, ci chiederemo spesso se limite e integrale si possano scambiare. Per evitare di fare una lunga parentesi quando ci servirà conoscere i relativi teoremi, ho deciso di levarcele dai piedi in questa prima lezione.

Sappiamo già che limite e integrale di Riemann non commutano in generale:

Esempio 1.1. Prendiamo $f_n = \max(0, n - n^2|x - \frac{1}{n}|)$. Abbiamo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x$. Quindi integrale e limite non si possono scambiare. Ricordiamo che in generale un criterio utile per l'integrale di Riemann è

Teorema 1.1. *Teorema della convergenza uniforme: se $f_n \to f$ uniformemente, limite e integrale si possono scambiare.*

Ricordiamo che f_n convergono uniformemente a f se per ogni ϵ esiste un $N(\epsilon)$ tale che, per ogni $n > N(\epsilon)$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per ogni x. La differenza con la semplice convergenza puntuale è che $N(\epsilon)$ non dipende da x. La convergenza nell'esempio (1) non è uniforme!

Una cosa un po' più imbarazzante è che a volte una successione di funzioni può convergere a una funzione per cui l'integrale di Riemann non è nemmeno definito! questo succede di solito quando la funzione limite è violentemente discontinua. (Ricordiamo che la definizione dell'integrale secondo Riemann usa una suddivisione dell'intervallo nel dominio e definisce somme inferiori e superiori; vedete disegnino.)

Esempio 1.2. Un esempio di funzione ovunque discontinua è naturalmente la funzione caratteristica di $\mathbb{Q}$. Qui è ovvio che l'integrale secondo Riemann non converge: i cassettini inferiori e superiori hanno sempre altezza 0 e 1.

Esempio 1.3. Sul segmento $[0,1]$, si consideri F_1 che fa 1 fuori da un segmento centrale di lunghezza l, cioè $[\frac{1-l}{2}, \frac{1+l}{2}]$, e che va giù linearmente fino a zero al centro. Cioè $f_1 = \min(1, \frac{2}{l}|x - \frac{1}{2}|)$. Al secondo passo, escludiamo un segmento centrale da ogni lato, ciascuno di lunghezza l^2: $f_2 = f_1 \cdot \min(1, \frac{2}{l^2}|x - \frac{1}{4}(1-l)|) \cdot \min(1, \frac{2}{l^2}|x - \frac{1}{4}(3+l)|)$. E cosìvia. Si ha $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 1 - l\sum_{n=0}^{\infty}(2l)^n = 1 - \frac{l}{1-l}$. Ma f_n convergono a una funzione il cui insieme di discontinuità è un Cantor generalizzato C_l, la cui misura è (per caso) ancora $1 - \frac{l}{1-l}$. Per $l < \frac{1}{3}$, C_l ha quindi misura non nulla, e quindi non è integrabile secondo Riemann.

Queste possono sembrare funzioni "patologiche", ma le domande che sollevano sono realmente importanti anche per noi fisici, per le ragioni che ho menzionato prima. (E comunque le funzioni "frattali" sono ormai comprese essere importanti sia in matematica (funzioni continue ma mai differenziabili sono dense) che in fisica (Mandelbrot).)

Questi esempi non sono comunque l'unico problema dell'integrale di Riemann. Questo è anche difficile da generalizzare a spazi più complicati che un intervallo o $\mathbb{R}$.

L'integrale di Lebesgue si definisce in due passi.

1. Definiamo prima una nozione di "misura" che permette di misurare la "lunghezza" di insiemi molto più generali che semplici intervalli (per esempio un insieme di Cantor, o $\mathbb{Q}$.) [Il fatto che $\mathbb{Q}$ ha misura 0 è stato chiamato "Es.3" a lezione.]

   Non starò a rompervi l'anima con la definizione precisa di questa misura, ma giusto per darvi un'idea:

   - Definisco misura esterna *out*(S) di un insieme S come l'inf della misura dei plurintervalli che lo contengono, e misura interna $inn(S)$ come il sup della misura dei plurintervalli che contiene;

- Se misura interna ed esterna coincidono, l'insieme si dice misurabile e $inn(S) = out(S) \equiv Leb(S)$ si chiama la misura di Lebesgue di S.

2. Ora definiamo l'integrale nel modo seguente. Dividiamo il *codominio* in intervalli lunghi $1/n$. Ora calcoliamo la "somma inferiore" (disegno)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} Leb[f^{-1}([\frac{i}{n}, \frac{(i+1)}{n}])] \tag{1.1}$$

e un'analoga "somma inferiore", e facciamo tendere $n \to \infty$. Et voilà: questo limite è l'integrale di Lebesgue.

Questa definizione è molto generale perché è difficilissimo trovare insiemi non misurabili secondo Lebesgue (bisogna usare l'assioma della scelta!).

Vi sto nascondendo un po' di sottigliezze nella definizione. In particolare, per estendere a funzioni illimitate, si divide la funzione in f_+ e f_- e si affrontano possibili divergenze di ciascuna separatamente (cioè si tronca la funzione a un codominio limitato, e si allarga il codominio sempre di più; se il limite esiste lo si definisce essere l'integrale di Lebesgue della funzione.) Questo implica che f è integrabile se e solo se $|f|$ lo è.

Definizione 1.1. Una definizione alternativa è la seguente [DM]: Definisco prima l'integrale di una funzione a gradini in modo ovvio; poi mi chiedo se esista una successione di funzioni a gradini f_n tale che $\sum \int |f_n| < \infty$ e $\sum f_n \to f$ ovunque $\sum |f_n| < \infty$. Se esiste f_n, $\int f \equiv \sum \int f_n$.

Esempio 1.4. $\mathbb{Q}$ ha misura 0: la misura esterna è zero perché $\mathbb{Q}$ è numerabile, quindi posso ordinarli: $\{r_n\}$. Costruiamo un intervallino grande ϵ^n attorno a r_n; questo plurintervallo $\mathbb{Q}_\epsilon$ ha misura $< \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n = \frac{1}{1-\epsilon}$. Facendo tendere $\epsilon \to 0$, otteniamo 0.

Quindi guardiamo ora alla funzione caratteristica di $\mathbb{Q}$. Usando per esempio la definizione alternativa, possiamo approssimare la funzione con le funzioni caratteristiche degli insiemi di prima: $\sum_{i=1}^{n} f_i = \chi(\mathbb{Q}_{1/n})$.

Non so a voi, ma a me la prima volta che venne spiegato l'integrale di Lebesgue, mi sembrava la stessa roba: sempre di rettangoli si tratta.

Una prima differenza è che l'integrale di Riemann suddivide il dominio in intervalli, mentre l'integrale di Lebesgue suddivide il *codominio* in intervalli, e guarda alla misura della controimmagine di ciascuno. Nel dominio, gli intervalli non hanno ruolo speciale, perché sappiamo misurare insiemi più generali ($\mathbb{Q}$, o un punto). Ma perché sappiamo misurare questi insiemi più generali? perché possiamo prendere intervalli che diventano sempre più piccoli dove piace a noi ("adaptive mesh!").

Con questa nuova definizione, l'esempio (1) non dà problemi: l'integrale della funzione limite esiste, ed è uguale al limite dell'integrale delle funzioni.

Questo è un caso particolare del seguente teorema. Diciamo f misurabile se la controimmagine di $[-\infty, y]$ è misurabile per ogni y. Cominceremo anche a usare l'espressione "quasi ovunque" per dire "ovunque tranne che in un insieme di misura nulla".

Teorema 1.2. *Teorema della convergenza dominata:*
Siano f_n misurabili, $f_n \to f$ q.o. Supponiamo che esista g che "domina" le f_n: $\int g < \infty$ (g è integrabile) e $|f_n| < g$ per ogni n.

Allora f è integrabile, e $\lim \int f_n = \int f$.

Lo useremo diverse volte in questo corso, e lo userete nella vita (spesso senza ricordarvene).

Notate che per l'integrale di Riemann bisognava assumere la convergenza uniforme per poter scambiare limite e integrale. Era un'ipotesi molto più forte!

Esempio 1.5. Nell'esempio (1), la funzione dominante g sembrerebbe poter essere $g = \frac{1}{x}$. Ma questa avrebbe integrale infinito! quindi il teorema della convergenza dominata non è applicabile.

Notate che una funzione che va come x^s è integrabile all'infinito per $s < -1$, e integrabile attorno a zero per $s > -1$. (x^{-1} non è integrabile nè a zero nè all'infinito.)

Altri esempi:

Esempio 1.6. (1' a lezione) La successione di tende alte 1 e larghe $\frac{2}{n}$, cioè $f_n = \max(0, 1 - n|x - \frac{1}{n}|)$. Le funzioni non convergono uniformemente, ma si può applicare la convergenza dominata; e infatti $\int f_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Esempio 1.7. $f_n = n\chi(-1/n, 1/n)$; o anche $f_n = (1/n)\chi(-n, n)$, entrambe per $n \to \infty$.

In un certo senso si può fare a meno della dominante se la successione è monotona:

Teorema 1.3. *Se le f_n sono integrabili, $f_n \geq f_{n-1}$ per ogni n, e $\lim f_n = f$.*

Allora $\lim \int f_n = \int f$ se f è integrabile, e infinito altrimenti.

Questi teoremi servono anche per valutare certi integrali espliciti espandendo in serie (parte del)l'integrando, come vedremo a Esercitazioni. [Nota: la parte che segue di questa sezione non è stata fatta davvero nella lezione 1; ho introdotto i teoremi quando mi servivano.]

Dal teorema della convergenza dominata segue anche che lo scambio di derivata e integrale funziona abbastanza bene:

Teorema 1.4. *Se $f(x,t)$ in dominio $\times$ aperto è integrabile in x e C^1 in t, e se esistono maggioranti $g_0(x) \geq |f(x,t)|$ e $g_1(x) \geq |\partial_t f(x,t)|$, si possono scambiare derivata e integrale: $\partial_t \int dx f(x,t) = \int \partial_t dx f(x,t)$.*

Per l'integrale di Riemann, avremmo dovuto richiedere che f e $\partial_t f$ fossero entrambe continue sul dominio $\times$ aperto. (Per evidenziare la differenza, pensate a $f(x,t) = \phi(x)e^{itx}$.)

Notiamo anche che l'integrale di Riemann era definito su un intervallo; per ottenere l'integrale su $\mathbb{R}$ si mandava l'intervallo all'infinito. Alle volte questo funziona anche se non funziona l'integrale di Lebesgue, per il quale $|f|$ dev'essere integrabile per definizione. Un esempio notevole è $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}$, che è integrabile secondo Riemann, ma non assolutamente.

Una delle morali di questa lezione è che la nozione di convergenza puntuale (o anche "quasi ovunque") fa un po' schifo. Vedremo più in là perché, e come fare di meglio.

Per finire, impariamo a scambiare gli ordini di integrazione:

Teorema 1.5. *Se $\int\int dxdy|f(x,y)|$ esiste finito,*

$$\int dx \int dy f(x,y) = \int dy \int dx f(x,y) \ . \tag{1.2}$$

2 Norme e spazi vettoriali

Cominciamo dall'introdurre uno spazio vettoriale.

Definizione 2.1. Uno *spazio vettoriale* su un campo F è un insieme V con due operazioni, la *somma* $+ : V \times V \to V$ e la moltiplicazione $\cdot : F \times V \to V$, tale che:

- V è un gruppo abeliano sotto $+$, ovvero i) associatività: $(v+w)+z = v+(w+z)$; ii) esistenza di inverso e identità: $\forall x, y\ \exists z$ tale che $x+z = y$, iii) abelianità$v+w = w+v$;
- proprietà distributive: iv) $\lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$, v) $(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
- l'unità di F agisce come identità su V: $1 \cdot v = v$.

Ricordiamo anche che un anello è un gruppo abeliano (la cui operazione di gruppo è anche chiamata “somma”) dotato di un prodotto, in cui somma e prodotto sono legate dalla proprietà distributiva (formalmente identiche a iv e v nella definizione di spazio vettoriali, salvo che per un anello la moltiplicazione è interna!). Un campo è un anello con inverso.

Noi useremo come campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Gli esempi più banali di spazi vettoriali sono $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Vi lascio controllare gli assomi da soli.

Cosa sono $\mathbb{R}^\infty$ o $\mathbb{C}^\infty$? una possibilità è di usare lo spazio delle successioni $\{x_n\}$, con n che va da 1 a infinito. Questa è un'infinità numerabile. Possiamo provare anche a considerare un'infinità non numerabile, prendendo come indice non l'insieme dei numeri interi, ma l'insieme dei reali.

Arriviamo cosìagli esempi di spazi di funzioni, per esempio tutte le funzioni dall'intervallo in $\mathbb{R}$, o da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Si sommano proprio come le n–uple. Vedremo tra poco che questi spazi sono un po' troppo grandi per i nostri gusti.

Come vi ho menzionato la volta scorsa, una delle cose che ci serve saper fare è misurare la distanza tra due vettori. Questa è una cosa che in $\mathbb{R}^n$ sappiamo sicuramente fare. Ma proviamo un po' a generalizzare l'idea:

Definizione 2.2. Una *norma* è una funzione $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto ||v||$,

1. omogenea di grado 1: $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$;
2. senza direzioni piatte: $||v|| = 0 \;\Rightarrow v = 0$;
3. con disuguaglianza triangolare: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

Tutto naturalmente per ogni v, w, λ.

Già nel caso finito–dimensionale questa definizione è un po' più generale della solita norma di un vettore che conosciamo bene; difatti posso definire, su $\mathbb{R}^n$, la norma $||\{x_n\}||_p \equiv (\sum_n x_n^p)^{\frac{1}{p}}$. [Disegno delle palle unitarie per vari p.] Non è ovvio che questa sia una norma: la disuguaglianza triangolare, per esempio,

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p)^{1/p} \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} + (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p)^{1/p} \;, \tag{2.1}$$

è difficile da dimostrare per p generico, ma è vera: si chiama “disuguaglianza di Minkowski”, ed è valida anche su $\mathbb{C}$. Per $p = 2$, fortunatamente, ci è familiare, grazie al teorema di Pitagora!

Un esempio divertente è poi la “norma di Manhattan” $|| \sum_i a_i e_i ||_\infty \equiv \max(a_i)$. In un certo senso, questa è il limite per $p \to \infty$ di $|| \cdot ||_p$.

Per $p = 2$, ritroviamo la norma che conosciamo e amiamo. Vedremo tra non molto cosa ha di speciale $p = 2$ rispetto agli altri casi.

Passando ora al caso infinito–dimensionale, cominciamo ancora dalle n–uple infinite. Vorremmo munirlo della norma $||\cdot||_p$. Tuttavia, è chiaro che dobbiamo eliminare tante successioni: quelle per cui la norma è infinita! non tutte però: la finitezza della norma diventa equivalente alla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$, e sappiamo che esistono serie convergenti (abbiamo risolto da secoli il paradosso di Zenone!). Come facciamo a sapere se le successioni restanti sono uno spazio vettoriale? dobbiamo stabilire se, date due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ a norma finita, la loro somma sia ancora a norma finita. Ancora una volta viene a salvarci la disuguaglianza di Minkowski! che stavolta ci dice che $\{x_n+y_n\}$ ha norma finita anch'essa.

Definizione 2.3. Lo spazio di successioni in $\mathbb{C}$, munito della norma $||\cdot||_p$, si chiama l^p.

Detto tutto questo, non vi sorprenderò se vi dico che definizioni analoghe si possono estendere ulteriormente alle funzioni, che già prima vi ho detto di pensare come "successioni a indice continuo".

Purtroppo c'è un problemino tecnico. Vorremmo definire la norma sulle funzioni come sulle successioni, ma barattando la somma con un integrale:

$$||f||_p \equiv \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{2.2}$$

Questo sembra promettente, ma non è una norma! per rendersi conto del problema, ricordatevi che ci sono molte funzioni non nulle il cui integrale fa zero, per esempio le funzioni caratteristiche di insiemi a misura nulla. A questo ovviamo definendo una classe di equivalenza:

Definizione 2.4. Consideriamo lo spazio di funzioni complesse di un dominio Ω (che può essere un intervallo, $\mathbb{R}$, o chissà cosa), e quozientiamolo per la relazione che dice

$$f \cong g \text{ sse } f(x) = g(x) \text{ quasi ovunque} \tag{2.3}$$

cioè ovunque tranne che in un insieme di misura nulla.

Lo spazio di queste classi di equivalenza, munito della norma (2.2), si chiama $L^p(\Omega)$.

Si può anche considerare l'analogo della norma $||\cdot||_\infty$ vista prima per le successioni: diventa $||f||_\infty \equiv \sup_{x\in\Omega} f(x)$. Lo spazio L^∞ in realtà è definito usando "ess sup", ovvero il sup a meno di insiemi a misura nulla, in modo da essere limite degli L^p.

Infine, possiamo cominciare a imporre condizioni di continuità o differenziabilità sulle funzioni. Per esempio potremmo provare a restringere le norme di cui sopra allo spazio delle funzioni continue su un dominio, C^0. Sembrerebbe una cosa molto naturale, ma come ora vedremo, bisogna stare molto attenti!

Finora il caso infinito–dimensionale non sembra aver presentato difficoltà particolari. Le cose diventano più spinose quando si comincia a parlare di convergenza.

La prima cosa da chiarire è che c'è una nozione naturale di convergenza su uno spazio normato V:

Definizione 2.5. Una successione $\{v_n\}$ in uno spazio normato V si dice *convergente* a v se $\lim_{n\to\infty} ||v_n - v|| = 0$.

Esempio 2.1. Consideriamo le tende alte n dell'esempio (1) (1 a lezione), le f_n tendono puntualmente alla funzione $f = 0$. Ma se le consideriamo come elemento dello spazio $L^1(\mathbb{R})$, non tendono a $f = 0$, perché $||f_n - f|| = \int |f_n - f| = \int f_n = 1$ per ogni n. Questo non scende mai.

Esempio 2.2. Guardiamo ora alle tende alte 1 dell'esempio (1) (1' a lezione). Considerate come elementi dello spazio L^1, convergono a zero, visto che stavolta $||f_n - f|| = \int f_n = 1/n \to 0$. Considerate però come successione in L^∞ (la cui norma è il sup), non convergono a zero, perché $\max(f_n - f) = 1$ per ogni n.

3 Completezza; spazi di Hilbert

Abbiamo visto quindi che non tutte le serie in uno spazio normato convergono. E' un problema?

Vorremmo che le successioni[1] convergano nello spazio che stiamo considerando. Ma non posso certo mettermi a richiedere che una successione a caso converga. Quali successioni dobbiamo richiedere che convergano? ci vuole un criterio intrinseco alla successione (che non faccia coinvolgere quello che ci pare debba essere il limite). Un buon criterio "intrinseco" è:

Definizione 3.1. Una *successione di Cauchy* in uno spazio lineare normato è una successione v_n tale che, per ogni ϵ, esiste un N tale che per ogni $n, m > N$ si ha $||v_n - v_m|| < \epsilon$.

Vedremo presto perché sia questo il concetto giusto [cioè quando mostrerò che $\sum^\infty a_n v_n$ converge.]

Definizione 3.2. Uno spazio lineare normato si dice *completo* se le successioni di Cauchy

[1] Per favore non confondete le successioni che stiamo considerando adesso con le successioni che abbiamo usato per definire gli spazi l^p!

convergono. Normato, completo si chiama *di Banach*. Avete già visto questo concetto confrontando le proprietà di $\mathbb{Q}$ con quelle di $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1. *Una successione convergente è di Cauchy.*

Proof. $||f_n - f_m|| < ||f_n - f|| + ||f_m - f|| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

Definizione 3.3. Una serie $\sum v_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum ||v_n|| < \infty$.

Teorema 3.2. *Uno spazio vettoriale normato è completo se e solo se tutte le serie assolutamente convergenti convergono ($\sum ||v_n|| < \infty \;\Rightarrow \exists v$ such that $\sum v_n = v$.)*

Proof. ($\Rightarrow$) Sia V completo. Consideriamo una successione assolutamente convergente v_n. Definiamo le somme parziali $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Per ogni ϵ $\exists N$ tale che $\sum_{k=n+1}^{\infty} ||v_k|| < \epsilon$. Quindi, $\forall m > n > N$, $||w_m - w_n|| = ||\sum_{k=n+1}^{m} v_n|| < \sum_{k=n+1}^{m} ||v_n|| < \sum_{k=n+1}^{\infty} ||v_n|| = \epsilon$. La successione $\{w_n\}$ è allora di Cauchy, e quindi converge a un certo v. Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} v_n = v$.

($\Leftarrow$) Ora sia V tale che ogni serie che converge assolutamente converge. Sia w_n una successione di Cauchy. Per ogni k, posso trovare N_k tale che $||w_n - w_m|| < 2^{-k}$ per ogni $n, m > N_k$. Ne segue che $\sum_{k=1}^{\infty} ||w_{N_k} - w_{N_{k-1}}|| < \sum 2^{-k} < \infty$. Quindi $w_{N_k} - w_{N_{k-1}}$ è una serie che converge assolutamente. Quindi $\exists v$ tale che $\sum_{k=1}(w_{N_k} - w_{N_{k-1}}) = v$; in altre parole, $w_{N_k} \to v$. Ma ora, $||w_i - v|| < ||w_i - w_{N_k}|| + ||w_{N_k} - v||$. Dato un ϵ, posso scegliere k tale che $2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$ e $||w_{N_k} - v|| < \frac{\epsilon}{2}$. Quindi $||w_i - v||$ per ogni i maggiore di questo N_k. □

Esempio 3.1. Consideriamo adesso di nuovo le nostre due tende. Per quelle alte n, vediamo che la successione non è di Cauchy nella norma $||\cdot||_1$: difatti $\int |f_n - f_m| = 2\frac{m^2}{n^2+m^2}$. Per quanto sia alto n, posso mandare $m \to \infty$ e ottenere $||f_n - f_m||_1 \to 2$.

Per le tende alte 1, è visualmente chiaro che, per ogni n, per m abbastanza alto ho che $\max|f_n - f_m| = 1$. Quindi anche questa successione non è di Cauchy nella norma $||\cdot||_\infty$.

Meno male che ci è venuto che le successioni in questione non sono di Cauchy: si ha infatti

Teorema 3.3. *Gli spazi L^p sono completi.*

Per ora ci è andata bene perché ho scelto gli esempi ad arte. Non tutti gli spazi sono completi!

Esempio 3.2. Consideriamo le funzioni in $C^0[-1,1]$ che sono nx tra $-1/n$ e $1/n$, e $\mathrm{sign}(x)$ al di fuori. Queste convergono puntualmente alla funzione f che dà $\mathrm{sign}(x)$ ovunque tranne in $x = 0$, dove dà zero. Ma notate che f non è nello spazio!

Se proviamo a mettere la norma $|| \cdot ||_1$ su questo spazio, la successione è di Cauchy. Lo posso mostrare direttamente ($||f_n - f_m = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}||$, che è $> \frac{1}{n}$ per ogni $m > n$) o semplicemente pensando che le f_n convergono a f se pensate come funzioni in $L^1[-1,1]$, e che quindi sono di Cauchy. Questo allora mostra che $C^0[-1,1]$ non è completo con la norma $|| \cdot ||_1$.

Spero che il nome "completezza" appaia ora giustificato: si può ottenere uno spazio incompleto partendo da uno completo e tagliando via roba in modo scriteriato.

Invece se mettiamo la norma del sup, le cose vanno meglio: la successione f_n non è di Cauchy. Infatti, $\max_{-1<x<1}(f_n - f_m) = 1 - \frac{n}{m}$; per ogni n, basta prendere $m \to \infty$ e $||f_n - f_m||_\infty \to 1$. Non è difficile mostrare, però, che lo spazio $C_b[-1,1]$ è in realtà completo con la norma del sup (C_b sta per continue e limitate; la condizione di limitatezza serve perché la norma sia finita!). Conosciamo già la convergenza rispetto a questa norma: è la convergenza uniforme! quindi per mostrare che $C_b[-1,1]$ è completo si può usare un classico

Teorema 3.4. *Se ho una successione f_n di funzioni continue che convergono uniformemente a f, f è continua. ($\Rightarrow$ lo spazio delle funzioni continue e limitate è completo rispetto alla norma del sup.)*

La norma è importante, ma ci servirà anche sapere "proiettare" un vettore su un altro. La formalizzazione è chiamata "prodotto interno":

Definizione 3.4. Un prodotto interno in uno spazio vettoriale V è una mappa $V \times V : V$ ($v \cdot w$, o (v, w)) tale che:

1. $(v, w) = \overline{(w, v)}$.
2. $(\lambda \cdot v + \mu \cdot w, z) = \lambda(v, z) + \mu(w, z)$.
3. $(v, v) > 0$.
4. $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Esempio: in $\mathbb{C}^n$, $(v, w) = v_i \bar{w}_i$.

Un prodotto interno definisce una norma tramite $||v|| \equiv \sqrt{(v, v)}$. Per verificare la disuaglianza triangolare (esercizio!) serve la

Teorema 3.5. *Disuaglianza di Schwarz:*

$$|(v,w)|^2 \leq ||v||^2||w||^2 \tag{3.1}$$

Proof. Dati v e w, consideriamo $v' = v - \frac{(v,w)w}{(w,w)}$, che è la stessa combinazione che troveremo nell'algoritmo di Gram–Schmidt. La sua norma $(v', v') = ||v||^2 - \frac{|(v,w)|^2}{||w||^2}$, il che dimostra la tesi. Notate che l'uguaglianza vale quando $v' = 0$, cioè quando v e w sono ortogonali. $\square$

Due vettori v e w si dicono ortogonali se $(v, w) = 0$. (D'oh!)

Definizione 3.5. Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio vettoriale con prodotto interno, completo rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

Esempio 3.3. Lo spazio l^2 definito in precedenza è uno spazio di Hilbert, con il prodotto interno $(v, w) = \sum_{k=1}^{\infty} v_i w_i$.

Esempio 3.4. Lo spazio L^2 definito in precedenza è uno spazio di Hilbert, con il prodotto interno $(f, g) = \int dx f(x)\overline{g(x)}$.

Quindi è questo che distingue l^2 e L^2 dagli altri p.

4 Sistemi ortonormali completi

Ora vogliamo occuparci dell'esistenza di una *base* nello spazio di Hilbert.

In uno spazio vettoriale finito dimensionale, sappiamo già cosa sia una base: è un insieme di vettori particolari $\{v_n\}$ tale che ogni vettore $v = \sum a_n v_n$.

Ricordate che in dimensione finita basta controllare che i $\{v_n\}$ siano linearmente indipendenti (cioè che non esista una loro combinazione lineare con coefficienti non nulli che dia il vettore nullo), e tanti quanti la dimensione.

Se c'è un prodotto interno, possiamo anche richiedere che la base sia ortonormale. Naturalmente, se ho un insieme di vettori ortonormali, saranno anche linearmente indipendenti (supponiamo che esistano α_n tali che $\sum \alpha_n v_n = 0$; segue $(v_i, \sum \alpha_n v_n) = \alpha_i = 0$). Per lo stesso ragionamento, quando ho $v = \sum \alpha_n v_n$ con v_n ortonormali, trovo $(v, v_i) = \alpha_i$, che può essere conveniente.

Come trasferisco questi concetti alla dimensione infinita? non posso controllare che un insieme $\{v_n\}$ sia una base semplicemente contandone gli elementi e controllando che ce ne siano infiniti. Il problema è che la metà di infinito, o infinito meno uno, è ancora infinito!

E' una buona idea concentrarci su sistemi ortonormali. Questa condizione è facile da controllare: daremo ora un po' di esempi.

Esempio 4.1. Su $L^2[-\pi,\pi]$, abbiamo $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}$, con n da $-\infty$ a $+\infty$; abbiamo anche i seni $\{\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\}$ e i coseni $\{\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\}$, entrambi per n da 1 a ∞. Questi ultimi sono anche ortogonali tra di loro (l'integrando è una funzione dispari).

Definiamo i polinomi di Hermite $H_n(x) \equiv (-)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2}$. In $L^2(\mathbb{R})$, possiamo considerare il prodotto interno $(f,g) \equiv \int e^{-x^2} f\bar{g}$, e $\{(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(x)\}$ sono ortonormali. Oppure si può considerare il prodotto solito, e allora le funzioni $\{(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)\}$ sono ortonormali.

Altri esempi sono forniti dall'ortogonalizzazione di Gram–Schmidt: dato un insieme di v_n, definisco $w_2 = v_2 - \frac{(v_1,v_2)}{(v_1,v_1)} v_1$, etc., e poi $z_i = \frac{w_i}{||w_i||}$. (Questo si può applicare per esempio a polinomi su $[-1,1]$; si trovano cosìi cosiddetti polinomi di Legendre.)

Una proprietà (ovvia, ma che mette conto sottolineare) dei sistemi ortonormali è che vale ancora il teorema di Pitagora. Nel caso della norma euclidea, vi avevo chiesto di credere che vale in dimensione n piuttosto che solo in dimensione 2. Ora la dimostreremo in generale:

Teorema 4.1. *In uno spazio vettoriale munito di prodotto interno, se* $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$*,*

$$||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \ . \tag{4.1}$$

Proof. Gliela faccio prima per $n = 2$. Poi per n generico faccio tutti i passaggi di $(\sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j v_j) = \sum \alpha_i \bar{\alpha}_j \delta_{ij} = \sum |\alpha_i|^2$. □

Dimostrerò anche la formula per il prodotto interno di due vettori.

Quindi abbiamo visto che siamo capaci di trovare in fretta dei sistemi ortonormali. Ora arriva la domanda difficile. Ci piacerebbe cioè avere anche l'analogo di "spanna tutto lo spazio". Cioè vorremmo ancora che $v = \sum \alpha_n v_n$, ma questa volta con somma infinita.

Definizione 4.1. Un sistema ortonormale si dice *completo*[2] se per ogni v esistono α_n tali che

$$v = \sum \alpha_n v_n \ , \tag{4.2}$$

Notate che questo implica

$$\alpha_n = (v, v_n) \ . \tag{4.3}$$

[2]'Completo' per spazio e per sistema non c'entrano nulla!

Notate anche che questa uguaglianza va presa nell'unico senso possibile nello spazio di Hilbert: la successione $\sum \alpha_n v_n$ converge a v in norma. Quindi non è detto che la somma converga puntualmente a v.

5 Spazi di Hilbert separabili

Esaminiamo ora questo concetto di sonc. Prima di tutto bisogna chiedersi quando una somma come quella a secondo membro di (4.2) converga.

Teorema 5.1. *If $\{v_i\}$ is an orthonormal system, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i$ converges $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ converges.*

Proof. ($\Rightarrow$) Consideriamo la successione in $\mathbb{R}$ data da $x_n = ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$. Questa è una successione di Cauchy: difatti, per $m > n$, $|x_m - x_n| = \sum_{i=n}^{m} |\alpha_i|^2 = ||\sum_{i=n}^{m} \alpha_i v_i||^2$. Questo può essere reso piccolo a piacere perché la serie converge, e quindi la successione delle somme parziali converge, e quindi la successione delle somme parziali è di Cauchy.

($\Leftarrow$) Se $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ converge, vuol dire che la serie $\sum_{i=1} \alpha_i v_i$ converge assolutamente (per definizione). Ma quindi converge, perché lo spazio è completo. (Ricordate il teorema 3.2.) Giusto per essere espliciti, ripeto l'argomento: la serie $w_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ è di Cauchy, perché $||w_n - w_m||^2 = ||\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i v_i|| = \sum_{i=n+1}^{m} |\alpha_i|^2 < \sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i|^2$; e quest'ultimo può essere reso piccolo a piacere. Quindi la serie è di Cauchy, e quindi converge grazie alla completezza. $\square$

Notate che questo è uno dei motivi per aver imposto la completezza dello spazio!

D'altronde:

Teorema 5.2. *Se $\{v_i\}$ è un sistema ortonormale, $||v||^2 \geq \sum_i ||(v, v_i)||^2$.*

Proof. Partiamo prima dal caso in cui il sistema ortonormale è finito. Si calcola allora facilmente $||v - \sum (v, v_i) v_i||^2 = ||v||^2 - \sum |(v, v_n)|^2$. Quindi $||v||^2 \geq \sum |(v, v_n)|^2$ nel caso finito. Ma posso prendere il limite in cui la somma va all'infinito, e la disuguaglianza sarà ancora vera. $\square$

Da questi due risultati segue che la somma a secondo membro di (4.2) converge.

Ma questo non vuole ancora dire che converga a v; quindi (4.2) non è automatica.

L'esempio seguente mostra che questa è molto più che una preoccupazione accademica:

Esempio 5.1. $L^2[-\pi, \pi]$, solo seni. Se provo a espandere una funzione pari, ottengo $(v, v_n) = 0\ \forall n$.

Quindi il sistema ortonormale dato dai seni non è completo; non "spanna" l'intero spazio. In dimensione finita, bastava che il sistema lineare indipendente avesse la dimensione giusta. In dimensione infinita, come abbiamo visto, non basta che il sistema ortonormale abbia infiniti membri. (La metà di infinito, o infinito meno uno, fa ancora infinito!)

Un modo equivalente di capire la completezza di un sistema (la cui dimostrazione semplicissima dò a lezione esplicitamente) è il seguente:

Teorema 5.3. *Un sistema ortonormale $\{v_n\}$ è completo (=base) sse non esiste nessun vettore ortogonale non nullo a tutti i v_n.*

Fortunatamente esistono degli esempi di sistemi ortonormali completi.

Esempio 5.2. Gli esponenziali (considerati nell'esempio (4)) $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}$, con n da $-\infty$ a $+\infty$, sono un sonc. In questo caso, (4.2) è detta **serie di Fourier.** Segue che $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \cup \{\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1}^{\infty}$ è anche un sonc.

Nota sulla periodicità: tutte le funzioni nel sonc sono periodiche, ma le sto usando per espandere una qualsiasi funzione di $L^2[-\pi, \pi]$! Il trucco è che si può considerare una funzione non periodica come una funzione periodica discontinua. Naturalmente la serie di Fourier convergerà a una funzione periodica, ma tanto non vi avevo mai promesso che convergesse puntualmente alla funzione data. Questo sarà più chiaro con i teoremi sulla convergenza puntuale che citerò nella sezione 6.

Le funzioni $\{(2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)\}$ sono un sonc in $L^2(\mathbb{R})$.

Non in tutti gli spazi di Hilbert c'è un sonc, ma in tutti quelli di interesse per la fisica sì. Il nome giusto è:

Definizione 5.1. Uno spazio di Hilbert in cui esiste un sonc è detto *separabile*.

Revisitiamo ora la disuguaglianza di Bessel per un sonc. Era una disuguaglianza perché i v_n potevano non essere completi! a secondo membro "mancava qualcosa":

Teorema 5.4. *Per un sonc, vale*

$$||v|| = \sum_{n=1}^{\infty} |(v, v_n)|^2 \tag{5.1}$$

per ogni $v \in V$.

Proof. Riesaminamo la dimostrazione di Bessel: partivamo da $||v - \sum_{i=1}^{n}(v, v_i)v_i||^2$. A quel punto sapevamo solo che era positivo. Ora invece sappiamo che il $\lim_{n\to\infty}$ di questa successione di numeri reali è zero. Segue la tesi. □

In realtà è anche facile mostrare una "Parseval sesquilineare":

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{\infty}(v, v_n)(v_n, w) \tag{5.2}$$

(In dettaglio: $(v, w) = (v, \sum(w, v_n)v_n) = \sum(v, (w, v_n)v_n) = \sum(v_n, w)(v, v_n)$; nel primo passaggio abbiamo usato la continuità del prodotto scalare con un vettore.)

Possiamo pensare a Parseval come a un "Pitagora infinito". Notiamo anche che ci dà un modo di mappare uno spazio di Hilbert separabile qualsiasi in l^2:

$$v \mapsto \{(v, v_n)\}. \tag{5.3}$$

Questa mappa è uno a uno. Abbiamo anche mostrato che questa mappa porta norma in norma (Parseval); abbiamo anche visto che porta prodotto scalare in prodotto scalare, (5.2). Si dice che è un "isomorfismo". Ne segue che

Teorema 5.5. *Tutti gli spazi di Hilbert separabili sono isomorfi a l^2.*

6 Serie di Fourier

Ci concentriamo adesso sul sonc di esponenziali visto in (5). Lo sviluppo (4.2) diventa allora

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} \tag{6.1}$$

e (4.3) diventa

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-ikx} \ . \tag{6.2}$$

Queste due formule definiscono la serie di Fourier.

Senza la teoria generale che abbiamo studiato finora, potremmo chiederci se l'integrale in (6.2) esista. La funzione f è in L^2; sarà anche in L^1? in realtà, non ci serve chiedercelo, perché il prodotto interno fortunatamente è sempre finito, grazie alla disuguaglianza di Schwarz. (A dire il vero, con lo stesso ragionamento possiamo mostrare che $L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$! Consideriamo infatti $|(\int |f|)|^2 = |(|f|, 1)|^2 \leq || \, |f| \, ||^2 ||1||^2 = \int |f|^2$.)

Possiamo studiare l'effetto della derivata su questa serie. Supponiamo f periodica e differenziabile. Integrando per parti, troviamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-ikx} = ik f_k \ . \tag{6.3}$$

(Forse potreste pensare di derivare direttamente sotto il segno di serie, ma vi invito ad aspettare qualche lezione a fare questo, cioè a quando vi parlerò più formalmente dell'operatore derivata.) Quindi la serie della Fourier di f' è meno convergente della serie di Fourier di f. Potrebbe anche non convergere per niente. Questo succederà quando la funzione originaria era in $L^2[-\pi, \pi]$ ma la derivata non lo è.

Parafrasando: le proprietà di convergenza della serie sono legate al grado di differenziabilità della funzione.

Ecco ora un'insalata di risultati vari, senza dimostrazione, sulla convergenza puntuale o uniforme. Tutto sommato di questo tipo di convergenza non ce ne frega granchè, ma si tratta di risultati carini.

Definizione 6.1. Una funzione si dice continua a tratti se è continua tranne che in un numero finito di punti, dove la discontinuità è di prima specie. (Ricordiamo che una discontinuità di prima specie si ha quando esistono finiti i limiti sinistro e destro.)

Definizione 6.2. Proprietà di Dirichlet per una funzione in un punto: i) continua e differenziabile; ii) continua e non differenziabile, ma con derivata destra e sinistra; iii) discontinua di prima specie, e con derivata destra e sinistra (definite in modo ovvio).

Teorema 6.1. *Per una funzione continua con derivata prima continua tranne che in un numero finito di punti, la convergenza è uniforme. [PS2, pag.188, Thm.2.22]*

Teorema 6.2. *Per una funzione continua a tratti, la convergenza puntuale vale in tutti i punti in cui vale una delle proprietà di Dirichlet; nel caso iii), la convergenza è alla media. [PS2, pag.184,Thm.2.18,19.]*

Non potrebbe essere uniforme nel secondo caso!

Teorema 6.3. *Per una funzione continua a tratti, la serie di Fourier, sommata alla Cesàro, converge in ogni punto a f o alla media dei limiti sinistro e destro.*

7 Trasformata di Fourier

Grazie a (6.3), possiamo usare la serie di Fourier per studiare equazioni differenziali lineari. Certo che è importante che la variabile da studiare sia una funzione in un intervallo; può essere la funzione d'onda di una particella in una buca di potenziale, o più prosaicamente una corda di violino fissata alle estremità.

Ma come facciamo per problemi in cui la variabile non vive in un intervallo, ma su tutto $\mathbb{R}$?

Per vedere cosa succede, proviamo a pensare di allargare l'intervallo. Naturalmente non è necessario che l'intervallo sia $[-\pi, \pi]$. L'ho centrato su 0 per mia comodità. La lunghezza non è essenziale; se ho un intervallo $[-L, L]$, basta riscalare la variabile x. Ho quindi il sistema completo

$$\{\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{\pi ikx/L}\} \ . \tag{7.1}$$

La situazione è quindi qualitativamente la stessa per un intervallo finito di qualunque lunghezza. Vedete però che gli esponenti del sistema completo (7.1) sono sempre più fitti! nel limite $L \to \infty$, viene naturale continuare a scrivere l'integrale in (6.2), ma questa volta con k qualsiasi piuttosto che intero. Questo porta alla

Definizione 7.1. La *trasformata di Fourier* di una funzione $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ è la funzione

$$(\mathcal{F}(f(x)))(p) \equiv \hat{f}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx} \ . \tag{7.2}$$

Questa definizione può sembrare strana, o incompleta, per vari motivi.

Nel caso periodico, avevamo visto che Fourier dava un isomorfismo $L^2[-\pi, \pi] \to l^2$.

Nel caso non periodico, l'integrale rende le cose più difficili: in generale una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ non è integrabile, cioè non è in $L^1(\mathbb{R})$ (esempio: funzione che per $x \to +\infty$ va come x^α con $\alpha \in (-1, -1/2)$), e l'integrale non ha senso. Quindi non è chiaro che si possa definire su $L^2(\mathbb{R})$.

Notate che questo problema non l'avevamo al finito! se considero una funzione dell'intervallo che va come x^α per $x \to 0$ e non fa niente di speciale altrove, la condizione perché sia in L^2 è $\alpha < -1/2$, e perché sia in L^1 è $\alpha < -1$. Del resto, abbiamo visto prima in modo astratto che i coefficienti devono aver senso.

Un altro problema con (7.2) è la sua interpretazione. Che accidenti stiamo facendo? "espandendo"? le onde piane adesso non formano più un sonc – non è numerabile, e le onde piane non sono nemmeno in L^2!

Fortunatamente, si può dare un significato a (7.2). Ci sono due strategie: entrambe seguono la stessa strategia: definire la trasformata su un sottospazio *denso* (e quindi non completo) di L^2, ed estendere per continuità. Ci sono due possibilità naturali per questo sottospazio denso: partire da L^1 o da un altro spazio S di funzioni, che definiremo tra poco.

L^1 sembra abbastanza naturale, perché è il modo più veloce di dare senso all'integrale in (7.2). Si possono già dimostrare un po' di risultati:

Teorema 7.1. *La trasformata di Fourier di una funzione integrabile ($\equiv \in L^1(\mathbb{R})$) è continua.*

Proof.

$$|\hat{f}(p+\epsilon) - \hat{f}(p)| = |\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ipx} f(x)(e^{-i\epsilon x} - 1)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx |f(x)||e^{-i\epsilon x} - 1| \quad (7.3)$$

Ora possiamo immaginare una successione di ϵ che tende a zero. Naturalmente $|e^{-i\epsilon x} - 1| = | - i\epsilon x + O(\epsilon^2)| \to 0$. Possiamo in più osservare che l'integrando è maggiorato per ogni ϵ da $|2f(x)|$; quindi per il teorema della convergenza dominata posso scambiare limite e integrale, e trovo la tesi. □

Questa osservazione si può rendere più carina ricordando il teorema 3.4, che ci diceva che lo spazio $C_b(\mathbb{R})$ (le funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$, con la norma del sup) è completo. Si può dimostrare

Teorema 7.2. *$\mathcal{F}$ è continua da L^1 in C_b.*

Si può anche dimostrare una proprietà ulteriore: $\mathcal{F}(f)$ per $f \in L^1$ tende a zero all'infinito (Riemann–Lebesgue). Lo spazio $C_0(\mathbb{R})$ di tali funzioni è anch'esso completo.

Notate che non è per nulla detto che $\mathcal{F}$ di una funzione integrabile sia integrabile; in particolare, non se la funzione è discontinua (come vedremo, per conseguenza del teorema di inversione). Quindi, $\mathcal{F}(L^1) \neq L^1$.

Per esplorare oltre le proprietà di $\mathcal{F}$, mi viene più comodo definire uno spazio di funzioni molto "più piccolo" di L^1:

Definizione 7.2. Una funzione f di $\mathbb{R}$ è in S se è infinitamente differenziabile, e se $x^k \partial_j f \to 0$ per $x \to \pm\infty$, per ogni k e j. Una sequenza in S si dice convergente se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \partial_j f_n(x)| = 0 \quad (7.4)$$

per ogni k e j. Questa è una condizione piuttosto stringente: per esempio, f va a zero più velocemente di qualsiasi x^{-k}.

Esempio 7.1. $f = e^{-\alpha x^2}$ è in S. E' facile calcolare la sua trasformata di Fourier:

$$[\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2})](p) = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} e^{-p^2/4\alpha} \ . \tag{7.5}$$

Possiamo applicare F a questo spazio perché

Teorema 7.3. *$S \subset L^1$.*

Proof. A questo punto dovrebbe essere intuitivo: basta notare che $\sup|x^2 f| \equiv M$ è finito; ora spezzo l'integrale di f su $\mathbb{R}$ in un pezzo diciamo tra -1 e 1, e altri due pezzi all'infinito. Il primo è finito (la funzione è continua); gli ultimi due sono finiti perché la funzione è al di sotto di M/x^2. $\square$

Questo spazio ha la bella caratteristica che

Teorema 7.4. *$F(S) = S$.*

Proof. Si ha

$$\mathcal{F}[\partial_x f(x)](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \partial_x f e^{-ipx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \partial_x f (-ip) e^{-ipx} = ip\mathcal{F}[f(x)](p) \ , \tag{7.6}$$

e

$$\partial_p \left(\mathcal{F}[f(x)](p)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f e^{-ipx}(-ix) = -i\mathcal{F}[xf(x)](p) \tag{7.7}$$

(lo scambio della derivata con l'integrale si può fare grazie al teorema 1.4; con argomenti simili a quelli presentati sopra per dire che $S \subset L^2$, possiamo trovare una maggiorante in L per sia $|f(x)|$ che $|\partial_p(f(x)e^{ipx})| = |xf(x)|$.

Ora, notate che S può anche essere definito come lo spazio di tutte le funzioni f tali che $|x^j \partial_x^k f|$ è limitata per ogni j e k. E quindi anche $f \in S \Rightarrow |\partial_k(x^j f)|$ è limitata per ogni j e k. Visto che $S \subset L^1$ (teorema 7.3), e che $\mathcal{F}(L^1) \subset C_b$ (teorema 7.2), abbiamo che $|\mathcal{F}(\partial_k(x^j f))| = |p^k \partial_p^j \hat{f}|$ è limitata per ogni k e j. Ma allora $\hat{f}$ è in S. $\square$

Vediamo adesso un'altra proprietà di S.

Definizione 7.3. Un sottospazio A di uno spazio normato B si dice *denso* in B se ogni $\forall f \in B$ esiste una successione $f_n \in A$ che converge a f. (Alternativamente: per A sottoinsieme di uno spazio normato B, si definisce la chiusura di A come l'insieme dei limiti di tutte le successioni in A che convergono da qualche parte in B; allora A è denso in B se la chiusura di A è uguale a B.)

Per S si ha il teorema (che non dimostro; si veda [GW])

Teorema 7.5. *S è denso in L^2.*

Usiamo adesso che $\mathcal{F}(S) = S$ (teorema 7.4) e che S è denso in L^2 (teorema 7.5) per definire:

Definizione 7.4. La trasformata di Fourier $\mathcal{F}(f)$ di $f \in L^2$ è definita come il limite di $\mathcal{F}(f_n)$, dove $S \ni f_n \to f$ (nel senso di L^2). (Avrei anche potuto usare il fatto che (in $\mathbb{R}$) $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2 [C,R] o che C_c^0 è denso in L^2 [DM].)

Questo è un fatto più generale: una mappa lineare continua definita su un denso si estende a tutto lo spazio. Questo lo dimostreremo più tardi, quando parleremo più in generale di operatori tra spazi di Hilbert (di cui la trasformata di Fourier è un esempio). Vedremo anche perché ho sentito il bisogno di specificare "continua" accanto a "lineare" (che sembrerebbe superfluo), e perché $\mathcal{F}$ lo è.

8 Distribuzioni e trasformate di Fourier

[Ora che abbiamo definito S, è anche interessante considerare lo spazio "duale" di S:

Definizione 8.1. Lo spazio delle **distribuzioni temperate** S' è lo spazio dei funzionali lineari continui su S. Potrebbe sembrare che specificare la continuità sia cautela eccessiva: non è forse ovvio che una funzione lineare sia continua? vedremo tra qualche lezione che ciò non è vero in generale.

Una prima classe importante di elementi di S' è data da... normalissime funzioni (anche se non necessariamente in S)! Difatti, data una funzione f, possiamo cercare di definire il funzionale lineare

$$(\phi, f) = \int dx \phi(x) \bar{f}(x) \ . \tag{8.1}$$

Questo avrà senso purché f non esploda troppo violentemente all'infinito. Con un abuso di notazione, parleremo a volte di "funzioni in S'". Notiamo che la continuità non serve perché una funzione sia in S': per esempio la funzione

$$\theta(x) = \chi[\{x > 0\}] \tag{8.2}$$

è in S'.

Ma in realtà, l'esempio più importante di distribuzione temperata (quello che ha motivato la loro introduzione) è il seguente:

Esempio 8.1. La *delta di Dirac* è il funzionale su S definito da

$$(\phi, \delta) \equiv \phi(0) \equiv \int dx \phi(x) \delta(x) \ . \tag{8.3}$$

Questa equazione sarebbe chiaramente assurda se $\delta(x)$ fosse una funzione. Infatti, visto che il risultato dell'integrale non cambia se $f(x)$ cambia in un qualsiasi $x \neq 0$, vediamo che $\delta(x)$ dovrebbe essere nulla ovunque tranne che in $x = 0$. Ma a quel punto avremmo l'integrale di una funzione nulla quasi ovunque, che dovrebbe dare zero!

Intuitivamente, si può effettivamente immaginare che $\delta(x) = 0$ per $x \neq 0$, ma bisogna anche pensare che per $x = 0$ va a infinito. Per "normalizzare" questo infinito, si può anche aggiungere che $\int dx\delta(x) = 1$, che segue da (8.3). Questo può essere reso più preciso:

Teorema 8.1. *Una successione f_n di funzioni in S' tali che*

1. $f(x) > 0$
2. $f_n(x) \to 0 \quad \forall x \neq 0$
3. $\int dx f_n(x) = 1$ *per ogni n*

converge a $\delta(x)$ nel senso delle distribuzioni.

Abbiamo usato la

Definizione 8.2. Una successione di distribuzioni $f_n \to f$ in S' (o debolmente, o nel senso delle distribuzioni) se $(f_n, \phi) \to (f, \phi)$ per ogni $\phi \in S$. Un esempio di successione che approssima la delta è dato da

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} \ , \qquad \text{per } \alpha \to 0 \ , \tag{8.4}$$

nel senso che queste funzioni (con $\alpha = \frac{1}{n}$, per esempio) soddisfano alle condizioni del teorema 8.1.

Notate anche che $\delta(x - y)$ è l'analogo della delta di Kronecker δ_{ij}; infatti $\int f(x)\delta(x - y) = f(y)$, proprio come $\sum_i v_i \delta_{ij} = v_j$. Questo giustifica il suo nome. Questa analogia può essere spinta un po' oltre. Vale infatti

$$\int dx e^{-ipx} = 2\pi\delta(p) \tag{8.5}$$

che è analoga a $\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} = 2\pi\delta_{k0}$. Vedremo quest'equazione in molti modi; per adesso però guardiamo che vuol dire. Il primo membro è una distribuzione il cui integrale con una funzione test $\phi(p)$ può essere definito $\int dx \int dp e^{-ipx}\phi(p)$. Vogliamo mostrare che questo è uguale a $2\pi\phi(0)$. Per far questo, prendiamo

$$\int dx e^{-\alpha x^2} e^{-ipx} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-p^2/4\alpha} \ . \tag{8.6}$$

Ora, integriamo entrambi i membri con $\int dp\phi(p)$, dove $\phi \in S$. Al primo membro, possiamo usare il teorema di Fubini e scambiare l'ordine di integrazione: otteniamo così$\int dxe^{-\alpha x^2} \int dp\phi(p)e^{-ipx}$. Al secondo membro otteniamo $\int dp\phi(p)(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-p^2/4\alpha})$. Per $\alpha \to 0$ otteniamo quel che volevamo.

Cosìcome abbiamo definito il limite in senso "duale", definiamo anche la derivata:

Definizione 8.3. La derivata debole, o nel senso delle distribuzioni, di una distribuzione $f \in S'$ è definita da

$$\int dxf'(x)\phi(x) \equiv -\int f(x)\phi'(x) \ . \tag{8.7}$$

Questo ci permette di fare le derivate in modo molto più rilassato. Un esempio classico è

Esempio 8.2. La derivata della $\theta(x)$ definita in (8.2) è la delta di Dirac:

$$\int dx\theta'(x)f(x) \equiv -\int dx\theta(x)f'(x) = -\int_0^{+\infty} dxf'(x) = -(f(x))_0^{+\infty} = f(0) \equiv dx\delta(x)f(x) \ . \tag{8.8}$$

Chiudiamo ora la parentesi sulle distribuzioni (vedremo tra un attimo perché ci è stata utile) e torniamo alla trasformata di Fourier.]

Voglio dimostrare una formula simile alla (6.2). Non possiamo più dire che e^{ipx} è una base, e quindi non possiamo più sommare. **Euristicamente**, però:

1. E' naturale pensare che la somma in (6.2) venga sostituita da un integrale.

2. Usando la δ che abbiamo appena introdotto, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dp\hat{f}(p)e^{ipx} = \frac{1}{2\pi}\int dpe^{ipx}\int dye^{-ipy}f(y) = \\ &\frac{1}{2\pi}\int dy\int dpe^{ip(x-y)}f(y) = \int dy\delta(x-y)f(y) = f(x) \ . \end{aligned} \tag{8.9}$$

Questo viene formalizzato nel

Teorema 8.2. *Per una funzione in S, vale*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dp\hat{f}(p)e^{ipx} \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \ . \tag{8.10}$$

Proof. La derivazione in (8.9) è formale perchénon avevamo il diritto di scambiare gli integrali. Si può procedere usando approssimanti alla delta: si può considerare

$$\frac{1}{2\pi}\int dp e^{ipx}e^{-p^2/4\alpha}\int dy e^{-ipy}f(y) = \frac{1}{2\pi}\int dy f(y)\int dp e^{-p^2/4\alpha+ip(x-y)} = \int dy f(y)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha(x-y)^2}\right) \ ; \tag{8.11}$$

ora prendiamo $\alpha \to 0$ e otteniamo la derivazione in (8.9). □

Notate che questo teorema non è vero puntualmente in L^2, per la solita ragione: potrà essere vero solo a meno di insiemi di misura nulla.

Dimostriamo adesso un'altra proprietà importante di $\mathcal{F}$.

Definizione 8.4. La convoluzione di due funzioni f e g è

$$(f * g)(x) \equiv \int dy f(x-y)g(y) \ . \tag{8.12}$$

Si ha che

$$\mathcal{F}(f*g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx e^{-ipx}\int dy f(x-y)g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dy g(y)e^{-ipy}\int dx e^{-ip(x-y)}f(x-y) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(p)\hat{g}(p) \ . \tag{8.13}$$

dove lo scambio di integrali è consentito per il teorema 1.5 (di Fubini). Grazie al teorema di inversione 8.2, segue anche che

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g) \ . \tag{8.14}$$

Da (8.12) segue anche la "Parseval sesquilineare"

$$\int dx f(x)\bar{g}(x) = \int dp \hat{f}(p)\overline{\hat{g}(p)} \ . \tag{8.15}$$

che è analoga alla (5.2). Questa mostra che $\mathcal{F}$ è un isomorfismo da $L^2(\mathbb{R})\ldots$ in se stesso.

Ispirandoci a questa, possiamo anche definire $\mathcal{F}$ da S' in S', tramite:

$$(\mathcal{F}f, \phi) \equiv (f, \mathcal{F}\phi) \ . \tag{8.16}$$

questa estende la definizione su S. (Non potevo usare quest'ultimo fatto per definire $\mathcal{F}$ su S', perché S' non è completo.)

Un esempio di $\mathcal{F}$ su S' segue da (8.5) e dal teorema di inversione:

Esempio 8.3.

$$\mathcal{F}(1) = \sqrt{2\pi}\delta(p) \ , \qquad \mathcal{F}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ . \tag{8.17}$$

9 Operatori

A questo punto sappiamo tutto quel che c'è da sapere sugli spazi vettoriali infinito-dimensionali e sulle loro basi. Ora vogliamo generalizzare l'idea di "matrice" su questi spazi infinito-dimensionali. Anche qui incontreremo sottigliezze varie.

Definizione 9.1. Un operatore è una funzione lineare O tra due spazi di Hilbert (cioè una O tale che $O(av + bw) = aO(v) + bO(w)$).

Esempio 9.1. Nel caso finito–dimensionale, come ho già detto, un operatore non è altro che una matrice. Per esempio, data una base ortonormale $\{v_n\}$, si può espandere $O(v_i) = \sum O_{ij}v_j$ per certi coefficienti O_{ij}. Questi sono anche dati da $O_{ij} = (O(v_i), v_j)$.

Passando ora al caso infinito–dimensionale, la prima cosa da notare è che una funzione lineare può non essere "limitata", cioè il suo "coefficiente angolare" può crescere senza fine a seconda della direzione che scelgo (visto che esistono infinite direzioni!) Anche restringendomi alla "sfera" $||x|| = 1$, non è detto che $||f(x)||$ sia limitata. Questo perché si tratta di una sfera infinito-dimensionale! Per formalizzare questo concetto, definiamo:

Definizione 9.2. La norma di un operatore O è data da

$$||O|| = \sup_{||v||=1}(||Ov||) = \sup\left(\frac{||Ov||}{||v||}\right) . \tag{9.1}$$

O si dice *limitato* se $||O||$ è finita.

Il motivo per introdurre questi concetti è il seguente

Teorema 9.1. *Un operatore è continuo solo se è limitato.*

Proof. ($\Rightarrow$): $f_n \to f \Rightarrow ||f - f_n|| \to 0$; $||Of_n - Of|| = ||O(f_n - f)|| \leq ||O||||f_n - f||$, e, visto che $||O||$ è finito, $Of_n \to Of$.

($\Leftarrow$): dimostro che illimitato $\Rightarrow$ discontinuo. Infatti: $\exists f_n$ tale che $\frac{||Of_n||}{||f_n||} \to \infty$; ma allora $\frac{f_n}{||Of_n||} \to 0$; ma $O\frac{f_n}{||Of_n||}$ ha norma 1 $\forall n$.

$\square$

Una classe particolare di operatori è quella dei funzionali (cioè operatori lineari da H a $\mathbb{C}$). Si ha il

Teorema 9.2. *(di Riesz.) Ogni funzionale lineare continuo F su uno spazio di Hilbert H si può scrivere come prodotto interno per un vettore w di H:*

$$F(v) = (v, w)\ \forall v . \tag{9.2}$$

Inoltre si ha $||F|| = ||w||$. (In quest'equazione, la norma a primo membro è di un operatore; quella a secondo membro è di un vettore in H.)

Proof. Sia $\{v_n\}$ un sonc in H. Definiamo $F(v_n) \equiv \bar{\beta}_n$, e $w \equiv \sum \beta_n v_n$. Ora, $F(v) = F(\sum \alpha_n v_n)$; visto che F è continuo per assunzione, questo è uguale a $\sum \alpha_n F(v_n) = \sum \alpha_n \bar{\beta}_n$. Grazie a Parseval sesquilineare (5.2), questo è uguale a (v, w).

Per dimostrare che $||F|| = ||w||$, si noti che la disuguaglianza di Schwarz (3.1) è saturata quando v è proporzionale a w, cioè per $v = \rho w$ per un qualche ρ. Allora si ha

$$\sup \frac{|F(v)|}{||v||} = \sup \frac{|(v,w)|}{||v||} = \frac{|\rho| ||w||^2}{|\rho| ||w||} = ||w|| \ . \tag{9.3}$$

□

Se chiamiamo H^* lo spazio dei funzionali lineari continui su H, il teorema 9.2 ci dice che H^* è isomorfo a H.

Un altro esempio di operatore su spazio di Hilbert che abbiamo già incontrato è la trasformata di Fourier! Ricordate che l'avevamo definita su un denso e poi "esteso per continuità". Ora finalmente vediamo che vuol dire:

Teorema 9.3. *Sia O un operatore lineare continuo ($\Leftrightarrow$ limitato) da un sottospazio D denso in uno spazio di Banach A a uno spazio di Banach B. Allora esiste un'estensione continua di O alla chiusura di D.*

Proof. Prima di tutto definiamo O su A. Sia $v \in A$. Esiste allora $D \ni v_n \to v$. La successione v_n è di Cauchy in A. Ma allora $O(v_n)$ è di Cauchy in B, perché $||O(v_n) - O(v_m)|| = ||O(v_n - v_m)|| \leq ||O|| ||v_n - v_m||$. (Siccome O è continuo su D, e quindi limitato, $||O||$ è finito.) Visto che B è di Banach, la sucessione $O(v_n)$ converge in un qualche elemento di B che chiamiamo $O(v)$. Questa definizione sembra dipendere dalla successione v_n che ho scelto. Sia ora $v'_n \in D$ un'altra successione che converge a v. Si ha $||v'_n - v_n|| \leq ||v'_n - v|| + ||v_n - v|| \to 0$. Ma allora $||O(v'_n) - O(v_n)|| \leq ||O|| ||v'_n - v_n|| \to 0$. Infine, O definito in questo modo è continuo perché $\frac{||O(v)||}{||v||} = \lim \frac{||O(v_n)||}{||v_n||} \leq ||O||$. □

Esempio 9.2. Nel caso della trasformata di Fourier $\mathcal{F}$, avevamo usato $D = S \in L^2$. Naturalmente l'immagine si poteva prendere essere $B = L^2$, perché $S \subset L^2$.

Esempio 9.3. In S, non ve l'ho detto finora ma la convergenza è definita in modo molto forte (cioè $\lim_{n\to\infty} \sup|x^p \partial_q f_n| = 0$ per ogni p, q). La δ sarebbe in realtà continua con questa topologia. Si potrebbe quindi pensare di estendere per continuità la δ da S in L^2. Questo sarebbe un paradosso, visto che abbiamo imparato che $(L^2)' = L^2$.

Ma non è la topologia giusta: va usata la topologia della norma di L^2. In questa topologia, la delta non è continua.

10 Operatori autoaggiunti

Purtroppo la strategia di estensione per continuità spesso non funziona, perché molti degli operatori di interesse non sono continui:

Esempio 10.1. L'operatore derivata ∂_x su $L^2[-\pi,\pi]$ o $L^2(\mathbb{R})$. Non è definito su tutto lo spazio! non tutte le funzioni in L^2 sono differenziabili; anche per quelle che lo sono, la derivata non è necessariamente in L^2.

Potrei pensare di partire da un denso e poi estendere per continuità. Ma ∂_x non è limitato! Si consideri infatti $\sin(nx) \in L^2[-\pi,\pi]$: si ha $\frac{||\partial_x \sin(nx)||}{||\sin(nx)||} = \frac{||n\cos(nx)||}{||\sin(nx)||} = n$. Quindi la norma è infinita. Dal teorema 9.1, sappiamo che ∂_x non dovrebbe essere continuo. Per vedere questo in modo ancora più chiaro, consideriamo adesso la successione $\frac{1}{n}\sin(nx)$. Si ha che $||\frac{1}{n}\sin(nx)|| \to 0$, ma $||O(\frac{1}{n}\sin(nx))|| = ||\cos(nx)|| = 1$.

Per $L^2(\mathbb{R})$, possiamo considerare invece $f_\alpha = e^{-\alpha x^2}$. Si ha $\int dx(\partial_x f_\alpha) = 4\alpha^2 \int dx x^2 e^{-2\alpha x^2} = \alpha \int dx f_\alpha^2$. Quindi $\frac{||\partial_x f_\alpha||}{||f_\alpha||} = \sqrt{\alpha}$. Prendendo $\alpha \to 0$, si vede che l'operatore è illimitato.

In conclusione, non ho idee per come definire ∂_x come operatore da L^2 a L^2.

Già che ci siamo, continuiamo un po' a parlare dell'operatore derivata ∂_x in particolare:

1. Dobbiamo accontentarci di definire ∂_x su un qualche sottoinsieme (meglio denso) e sperare che per la fisica basti. Per esempio potrei definirlo sul sottospazio $C^1 \cap L^2 \subset L^2$ (che è denso; ricordate che addirittura anche S è denso in L^2, teorema 7.5). Questo è un po' triste perché dobbiamo rinunciare a poter calcolare valori d'aspettazione su qualsiasi funzione d'onda ci venga in mente, ma c'è sempre una ragione fisica per quel che non sappiam calcolare! e basterà una regolarizzazione opportuna.

2. Naturalmente poi c'è la derivata debole, che si può applicare pure a S' e quindi a funzioni discontinue, delta di Dirac... un po' quel che ci pare. E' importante sapere fare queste derivate deboli in varie applicazioni. (Abbiamo visto che $\partial(\theta) = \delta$; a esercitazioni vedremo che ∂(angolosa) =discontinua.) Però l'immagine di questa derivata debole è in S', non in L^2 (e quindi non sappiamo calcolare valori di aspettazione o simili).

3. In S, non ve l'ho detto finora ma la convergenza è definita in modo molto forte (cioè

$\lim_{n\to\infty} \sup|x^p \partial_q f_n| = 0$ per ogni p, q), e la derivata diventa continua per definizione ($f_n \to 0 \Rightarrow f'_n \to 0$).

4. Su S' abbiamo la "convergenza debole" (cioè $f_n \to 0$ iff $(\phi, f_n) \to 0 \forall \phi$). Quindi anche qui la derivata è continua: se ho $(\phi, f_n) \to 0 \forall \phi \in S$, segue che $(\phi, f'_n) = -(\phi', f_n) \to 0 \forall \phi \in S$, e quindi $f'_n \to 0$.

5. Notiamo infine che la derivata può essere considerata un operatore *chiuso*. Vediamo cosa vuol dire:

   Definizione 10.1. Un operatore O da $D \subset B$ in B (spazio di Banach) si dice *chiuso* se per ogni $f_n \to f$, **se** $O(f_n)$ converge a qualche g, si ha $O(f) = g$. In altre parole, quando la successione degli $O(f_n)$ converge, converge alla cosa giusta!

   Ricordiamo un teorema classico dell'analisi elementare, sullo scambio di limiti e derivate:

   Teorema 10.1. *Sia data una successione $f_n \to f$ che converge uniformemente di funzioni C^1, con le derivate f'_n che convergono uniformemente a g. Allora $g = f'$, cioè derivata e limite si possono scambiare. (In realtà si può rilassare la convergenza uniforme di f_n; seguirebbe dalla convergenza uniforme delle derivate.)*

   Questo teorema ci dice che l'operatore derivata da $C^1 \subset C^0$ in C^0, è chiuso se su entrambi i C^0 c'è la norma del sup.

6. Infine, si può introdurre

   Definizione 10.2. Lo spazio di Sobolev H^1 è lo spazio di tutte le funzioni in L^2 la cui derivata debole è ancora in L^2. Se si dota questo spazio di norma $\sqrt{\int |f|^2 + |f'|^2}$), la derivata diventa un operatore continuo da H^1 in L^2. Questo però è uno sporco trucco: abbiamo messo la derivata nella norma della funzione.

La **conclusione** di tutto questa discussione è che considereremo la derivata come derivata debole sullo spazio H^1. Però non useremo la norma $\sqrt{\int |f|^2 + |f'|^2}$: lo considereremo invece come sottospazio di L^2.

Come vedremo, questa discussione tecnica non termina la discussione del dominio. La parte più interessante, più fisica, della discussione del dominio degli operatori, viene fuori quando ci si occupa di "autoaggiunzione". Gli operatori di interesse in meccanica quantistica sono autoaggiunti, una generalizzazione al caso infinito-dimensionale dell'hermiticità di una matrice finito-dimensionale.

Definizione 10.3. L'aggiunto di un operatore A è definito dalla formula $(Af, g) = (f, A^*g)$. Perché esiste A^* tale che questa formula valga? A non è richiesto essere continuo, ma $(A\cdot, g)$ potrebbe essere continuo per qualche g. Chiamiamo per l'appunto $D(A^*)$ lo spazio dei g per cui il funzionale $(A\cdot, g)$ è continuo. Per questi g, il teorema di Riesz garantisce che esisterà un vettore h tale che $(A., g) = (., h)$. Chiamo $h = A^*g$. Quindi ho definito A^* e $D(A^*)$.

L'analogo "formale" dell'hermiticità sarebbe $A = A^*$. Questa definizione purtroppo è troppo debole. Per esempio, una matrice hermitiana (o più in generale normale) può essere diagonalizzata: questo è il teorema spettrale finito–dimensionale. Per avere un teorema analogo nel caso infinito-dimensionale, $A = A^*$ non basta.

Definizione 10.4. Un operatore A si dice *autoaggiunto* se $A = A^*$ e $D(A) = D(A^*)$.

Esempio 10.2. Guardiamo adesso all'operatore $O = -i\partial$ su un intervallo $[a, b]$, con dominio $D(O) = H^1[a, b]$. Qual è l'aggiunto? integrando per parti (si può fare perché parliamo della derivata debole):

$$(-i\partial f, g) = (f, -i\partial g) - i(f\bar{g})_b^a \ . \tag{10.1}$$

Dobbiamo chiederci per che g questo è un funzionale lineare continuo sulle funzioni f. Il primo termine a secondo membro è sicuramente continuo. Il secondo invece è $f(a)\bar{g}(a) - f(b)\bar{g}(b)$ è essenzialmente una delta! e perciò non è continuo, a meno che $g(a) = g(b) = 0$. Quindi l'aggiunto è ancora $O^* = -i\partial$, ma con dominio

$$D(O^*) = \{g \in H^1[a, b] \mid g(a) = g(b) = 0\} \ . \tag{10.2}$$

Quindi O non è autoaggiunto! il dominio di O^* è più piccolo di quello di O.

Possiamo allora provare a prendere un dominio più piccolo per O, sperando che il dominio di O^* si allarghi e che i due a un certo punto coincidano. La scelta più naturale è

$$D(O) = \{f \in H^1[a, b] \mid f(a) = f(b)\} \ . \tag{10.3}$$

Con questa scelta, è facile vedere che l'aggiunto ha lo stesso dominio, e quindi O è autoaggiunto.

11 Teorema spettrale

E ora vediamo l'analogo infinito-dimensionale degli autovalori. Ricordiamo che nel caso finito–dimensionale è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\det(A - \lambda 1) = 0$.

Nel caso infinito–dimensionale:

Definizione 11.1. Lo *spettro* di A è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $A - \lambda 1$ non esiste come operatore limitato su H.

$A - \lambda 1$ può fallire di essere un operatore limitato in vari modi.

1. Il più ovvio, quello strettamente simile al caso finito dimensionale, è quando $A - \lambda 1$ non è iniettivo. Questo vuol dire che $\exists v \in H$ tale che $Av = \lambda v$; quindi c'è un autovettore. In questo caso, si dice che λ appartiene allo spettro *discreto*.

   Però $A - \lambda 1$ potrebbe essere iniettivo, ma l'inverso potrebbe non avere le proprietà che abbiamo richiesto.

2. Per esempio, può succedere che $(A - \lambda 1)^{-1}$ si possa definire solo su un sottospazio non denso di H. In tal caso, chiaramente non possiamo estenderlo a tutto H. In questo caso, si dice che λ appartiene allo spettro *residuo*. Questo come vedremo è un caso un po' patologico, ma un esempio è dato da $s : e_n \to e_{n+1}$ in l^2. $\lambda = 0$ è nello spettro residuo: s è iniettivo e quindi non ha kernel, ma non è surgettivo; l'"inverso" $s^{-1} : e_n \to e_{n-1}$ non è definito su e_0 – cioè $ss^{-1}e_0$ non può fare e_0, qualunque cosa io decida di chiamare $s^{-1}e_0$. (Naturalmente matrici finito–dimensionali rettangolari possono essere iniettive e non surgettive; nel caso infinito–dimensionale ora vedete che può succedere anche per operatori da H in H.)

3. Infine, anche se $(A-\lambda 1)$ è iniettivo e riesco a definire densamente $(A-\lambda 1)^{-1}$, questo potrebbe essere non continuo ($\Leftrightarrow$ non limitato). In questo caso λ si dice appartenere allo spettro continuo.

Perché abbiamo imposto cosìtante cose su $(A - \lambda 1)$, e non ci siamo accontentati di richiedere che non fosse iniettivo? in questo caso avremmo solo lo spettro discreto.

Il punto è che, nel caso infinito dimensionale, un operatore autoaggiunto non avrà in generale una base (un sonc) di autovettori. Addirittura può capitare che lo spettro discreto non esista nemmeno, e che lo spettro sia tutto continuo.

Esempio 11.1. La derivata in $L^2(\mathbb{R})$. Sappiamo che gli autovettori sarebbero le onde piane, ma queste non sono per nulla in $L^2(\mathbb{R})$! quindi non c'è spettro discreto. Queste "false" autofunzioni segnalano che siamo nello spettro continuo. Per vedere perché, mostriamo prima che possiamo scrivere una sequenza di approssimanti $f_n(k)$ all'onda piana e^{ikx}, che non convergono in L^2 (la successione non è nemmeno di Cauchy, quindi non c'è contraddizione con la completezza) ma tali che $(A - \lambda) f_n$ converge a zero in L^2.

[Basta prendere funzioni f_n che cadono all'infinito sempre più lentamente (ex. $f_n = e^{ikx} g_n$, con $g_n = e^{-n\sqrt{1+x^2}}$). Otteniamo $\partial(e^{ikx} g_n) = ik(e^{ikx} g_n) + e^{ikx} g_n'$. Si può mostrare (con la nostra scelta) che $||(\partial - ik)(f_n)||^2 < 1/n$, che quindi tende a zero.] Ma se $(A-\lambda)f_n = g_n$ converge a zero, possiamo scrivere $f_n = (A-\lambda)^{-1} g_n$. Quindi abbiamo che $(A-\lambda)^{-1}$ manda una sequenza che converge in L^2 in una sequenza che non converge in L^2. A casa mia, questo vuol dire che $(A-\lambda)^{-1}$ non è continuo.

Quindi per λ nello spettro continuo non possiamo aspettarci delle autofunzioni in H, solo delle autofunzioni approssimate. Naturalmente è un peccato rinunciare totalmente alle autofunzioni. Nel caso dell'onda piana, sappiamo che le si può dare un senso in S'. In generale, con un po' di fantasia si può trovare uno spazio di distribuzioni in cui la sequenza f_n converge a una "autofunzione generalizzata".

Riassumendo, nel caso di λ nello spettro continuo, non c'è un autovettore in H, ma 1) sequenze di "autovettori approssimati" in H 2) "autovettori generalizzati" in S' o chi per lui.

Ora che ci siamo assicurati che la nostra definizione di spettro è abbastanza generale, possiamo generalizzare quel che sappiamo in dimensione finita? per es., un risultato importante è che una matrice autoaggiunta (=hermitiana) può essere diagonalizzata (cioè ha una base di autovettori), e che ha autovalori reali. Cosa sappiamo in dimensione infinita?

Teorema 11.1. *(spettrale; parte 1) Sia A un operatore autoaggiunto. Allora:*

1. *il suo spettro è contenuto in $\mathbb{R}$;*
2. *autovettori corrispondenti a autovalori diversi sono ortogonali;*
3. *non ha spettro residuo.*

Proof. 1. Cominciamo dallo spettro discreto (gli autovalori): se $Av = \lambda v$, ho $\lambda(v,v) = (Av, v) = (v, Av) = \bar{\lambda}(v,v)$; quindi $\lambda = \bar{\lambda}$.

   Per lo spettro continuo: definiti $\lambda_+ + i\lambda_- \equiv \lambda$, per ogni v ho $||(A-\lambda)v||^2 = ||(A-\lambda_+)v||^2 + \lambda_-^2 ||v||^2 \geq \lambda_-^2 ||v||^2$; visto che $(A-\lambda)$ è invertibile, posso prendere $v = (A-\lambda)^{-1} w$ e ottengo che $||(A-\lambda)^{-1} w||^2 \leq \frac{1}{\lambda_-^2} ||w||^2$ per ogni w.

   Quanto allo spettro residuo, dimostreremo tra poco che è vuoto (usando solo che lo spettro discreto è reale, che abbiamo già dimostrato.)

2. Si ha $\lambda_1(v_1, v_2) = (Av_1, v_2) = (v_1, Av_2) = \bar{\lambda}_2(v_1, v_2)$. Visto che $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, si ha $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2)$.

3. In generale si ha $(\mathrm{im}(O))^\perp = \ker(O^\dagger)$. (Questo perché $O^\dagger v = 0 \Rightarrow 0 = (w, O^\dagger v) = (Ow, v)\ \forall w \Rightarrow\ v$ è ortogonale all'immagine di O.) Ora, se λ fosse nello spettro residuo, esisterebbe un v ortogonale all'immagine di $(A-\lambda)$. Quindi sarebbe nel kernel di $(A-\lambda)^\dagger = A - \bar\lambda$. Ne segue che $\bar\lambda$ è nello spettro discreto; ma allora $\bar\lambda = \lambda$ sarebbe nello spettro discreto, contrariamente all'ipotesi.

□

Teorema 11.2. *(spettrale, parte 2; formulazione dei fisici). Esiste un sistema ortonormale $\{v_n\}$ e una famiglia a un parametro di autofunzioni generalizzati $\{v_\lambda\}$ tale che, per ogni $f \in H$, si può scrivere*

$$f = \sum a_n v_n + \int d\lambda a_\lambda v_\lambda \tag{11.1}$$

$$Af = \sum \lambda_n a_n v_n + \int d\lambda\, \lambda a_\lambda v_\lambda\ . \tag{11.2}$$

Esempio 11.2. L'operatore $-i\partial$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, con dominio (10.3), è autoaggiunto. Per trovarne gli autovalori, è sufficiente risolvere l'equazione differenziale $-if' = af$; trovo il sonc degli esponenziali. In questo caso, lo spettro è puramente discreto.

Esempio 11.3. L'operatore $-i\partial$ su $\mathbb{R}$ è autoaggiunto. Ancora una volta l'equazione da risolvere è $-if' = af$; la soluzione sono le onde piane, e il teorema spettrale diventa l'affermazione che ogni funzione si può scrivere come trasformata di Fourier (cosa che sappiamo dal teorema di inversione) e che la derivata si scrive in questa base come moltiplicazione per $-ip$.

12 Funzioni olomorfe

Ricordate che i numeri complessi sono espressioni della forma $z = x + iy$, dove $i^2 = -1$. Ricordatevi anche la rappresentazione $z = re^{iphi}$. (Esercizietto: Formule di duplicazione di seni e coseni da z^2.)

Definito questo nuovo campo di numeri, voglio definire il concetto di differenziabilità rispetto ad esso. Vedremo che il risultato è molto diverso dalla differenziabilità su $\mathbb{R}$.

Definizione 12.1. Una funzione complessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa in un punto z_0 se esiste la derivata complessa

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ . \tag{12.1}$$

La ragione per cui questa condizione sulla funzione è più forte della solita differenziabilità è che il limite dev'essere indipendente dalla direzione di $z - z_0$.

Esempio 12.1. La funzione $\bar{z}$ non è olomorfa: per esempio nell'origine, dobbiamo calcolare $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$; se $z = re^{i\phi}$, questo dà $\lim_{r\to 0} e^{-2i\phi}$, che chiaramente non esiste.

Invece la funzione z è olomorfa: $\lim_{z\to 0} \frac{z}{z} = 1$.

Informalmente, si può dire che la condizione di olomorfia dice che la funzione "dipende da z e non da $\bar{z}$": $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Possiamo formalizzare questo fatto:

Teorema 12.1. *Una funzione f è olomorfa $\Leftrightarrow$ esistono f_x e f_y, e vale*

$$f_y = i f_x \tag{12.2}$$

Proof. ($\Rightarrow$) $f'(z)$ risulta uguale a f_x o a f_y/i a seconda che si prenda Δz reale o immaginario.

($\Leftarrow$) Se f è differenziabile, vale $f(x + \delta x, y + \delta y) = f(x, y) + \delta x f_x + \delta y f_y + O(\delta^2)$. Allora si calcola $f'(z) = \frac{f_x \delta x + f_y \delta y + O(\Delta^2)}{\delta x + i\delta y} = f_x + O(\delta)$. □

Una volta che la derivata in senso complesso esiste, le regole di derivazione sono formalmente le stesse che nel caso reale: per esempio

$$(z^n)' = nz^{n-1} \ . \tag{12.3}$$

E' tradizionale (anche se forse non troppo utile) riesprimere la condizione di olomorfia (12.2) definendo parte reale e immaginaria della funzione: $f = u + iv$. Questo dà

$$u_x = v_y \ , \qquad u_y = -v_x \tag{12.4}$$

che vengono chiamate condizioni di Cauchy–Riemann.

Un polinomio in z è quindi una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Che succede se prendiamo una serie di potenze?

Teorema 12.2. *Una serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ converge in un cerchio centrato nell'origine.*

Proof. Supponiamo che $\exists\, z$ tale che $\sum \alpha_n z^n < \infty$. Mostriamo ora che la serie converge assolutamente per tutti i w tali che $|w| < |z|$. Converge anche uniformemente in qualsiasi cerchio $|w| \leq r$, con $r < |z|$.

Sappiamo che $\exists N$ tale che, $\forall n > N$, $|\alpha_n z^n| < 1$. Quindi:

$$|\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n w^n| < \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n w^n| = \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n z^n| \left|\frac{w}{z}\right|^n < \sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{w}{z}\right|^n < \infty \ . \tag{12.5}$$

Per vedere che la convergenza è uniforme in un cerchio $|w| \leq r$, notiamo anche che $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{|w|^n}{|z|^n} = \frac{|w/z|^N}{1-|w/z|}$. Se $|w| < |z|$, questo va a zero per $N \to \infty$. □

Possiamo anche considerare delle somme "bilatere", cioè $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n$. Possiamo pensare a queste come $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} z^{-n}$. La prima convergerà all'interno di un certo cerchio $|z| < r_+$; la seconda per $|1/z| < 1/r_-$, con un certo r_-. Questa è una corona circolare $r_- < |z| < r_+$.

Esempio 12.2. La serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{12.6}$$

converge in un cerchio a raggio 1, come si vede dal fatto che c'è un polo a $z = 1$.

Notiamo che nel dominio di convergenza, una serie di potenze bilatera è olomorfa. Infatti, in (12.5) anche la serie delle derivate converge uniformemente in un cerchio di raggio $r < |z|$: infatti avremmo stavolta $|\sum_{n=N}^{\infty} n\alpha_n w^{n-1}| =< |w|^{-1}|\sum_{n=N}^{\infty} n|w/z|^n = |w|^{-1}|w/z|^N \frac{(N+|w/z|(1-N))}{1-|w/z|^2}$. Quindi la serie delle potenze converge uniformemente, e per il teorema 10.1 possiamo scambiare la derivata con la serie.

13 Teoremi di Cauchy

Arriviamo adesso al cuore della teoria delle funzioni olomorfe:

Teorema 13.1. *Se g è olomorfa in un aperto A semplicemente connesso $\subset \mathbb{C}$, e γ è una curva al suo interno,*

$$\oint_\gamma g(z)dz = 0 \ . \tag{13.1}$$

Proof. Il differenziale $g(z)dx + ig(y)dy$ è chiuso perché $\partial_y g - i\partial_x g = 0$; ed è esatto perché A è semplicemente connesso. Il risultato segue dal teorema di Stokes. □

Da questo segue anche

Teorema 13.2. *Se f è olomorfa in un aperto A semplicemente connesso $\subset \mathbb{C}$, e γ e w sono rispettivamente una curva un punto al suo interno,*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \tag{13.2}$$

Proof. Applichiamo 13.1 a $g = \frac{f}{z-w}$, e γ di quel teorema una curva che sia la differenza della γ assegnata e di un circoletto attorno a w. Allora possiamo valutare l'integrale su quel circoletto C_w:

$$\oint_{C_w} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(w+\epsilon e^{i\theta}) d\theta \; ; \tag{13.3}$$

nel limite $\epsilon \to 0$ si ottiene il risultato. (Il limite si può scambiare perché f è continua in ϵ; se prendo una successione di ϵ sempre più piccoli, ho una successione che converge addirittura uniformemente. Oppure, visto che è continua, è limitata su un dischetto a raggio finito, e posso prendere quella costante come maggiorante.) □

A questo punto vale anche

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz \tag{13.4}$$

che si ottiene derivando (13.2) rispetto a w. (La derivata si può scambiare con l'integrale, perché l'integrando di (13.2) è continuo in z e w lungo la curva γ; si può usare allora 10.1 con maggioranti trovate come nella dimostrazione 13.)

In realtà (13.4) si può anche ottenere in modo simile a (13.2):

$$\oint_{C_w} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = i\epsilon^{-n} \int_0^{2\pi} f(w+\epsilon e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \; ; \tag{13.5}$$

questo dà zero per $n \neq 0$.

Ora, (13.4) implica che

Teorema 13.3. *Una funzione olomorfa è infinitamente differenziabile.*

Ora è naturale chiedersi se una funzione olomorfa sia anche analitica. Ricordiamo che, sui reali, $f \in C^\infty$ non coincide necessariamente con la sua serie di Taylor. L'esempio che si dà di solito è $f = e^{-1/x^2}$, che è C^∞ ma il cui sviluppo di Taylor attorno a $x = 0$ dà $f = 0$. (Vedrete più in là che questa funzione ha un ruolo molto importante nello sviluppo semiclassico della meccanica quantistica.)

Ma sui complessi, vediamo che e^{-1/z^2} non è olomorfa in $z = 0$. Difatti possiamo prendere $z = iy$ e otteniamo $f = e^{1/y^2}$, che diverge! quindi sui complessi questa funzione fa alquanto schifo.

Più in generale:

Teorema 13.4. *Una funzione olomorfa in un dominio semplicemente connesso A coincide col suo sviluppo di Taylor attorno a z_0 nel più grande cerchio di centro z_0 interamente contenuto in A.*

Proof. Si considera $f(w) = \oint_{C_w} \frac{f(z)}{(z-w)} dz$ su un contorno in cui z va attorno a 0 e w. Si espande $(z-w)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{z^{k+1}}$ (che converge perché $|w/z| < 1$). La serie cosìottenuta, $\int dz f(z) \sum \frac{w^k}{z^{k+1}}$, converge uniformemente sul contorno in questione perché $\sum_{k=N}^{\infty} |\frac{w^k}{z^k}| = \frac{|w/z|^N}{(1-|w/z|)} < \frac{r^N}{(1-r)}$, dove $r = max|w/z|$ sul contorno. Quindi ottengo $f(w) = \sum \frac{1}{k!} w^k f^{(n)}(0)$. □

Posso anche usare questo risultato per trovare facilmente il raggio di convergenza della serie di Taylor; basta vedere dove sono le singolarità.

Esempio 13.1. Torniamo all'esempio 12: se ci viene data la funzione $\frac{1}{1-z}$, vediamo che il teorema 13.4 ci dice automaticamente che lo sviluppo di Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ha raggio di convergenza 1.

Supponiamo che adesso f sia olomorfa in un dominio "con un buco", e che z sia nel buco. La serie di Taylor non sembra applicabile, ma posso usare una serie con termini anche negativi:

Teorema 13.5. *Una funzione olomorfa in un dominio A può essere espressa come somma bilatera (detta "di Laurent") attorno a z_0:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{13.6}$$

nella più grande corona circolare di centro z_0 interamente contenuta in A.

Proof. [Questa volta ho un contorno che si può deformare alla somma di C_+ e C_-, con C_+ attorno a w e 0, e C_- tra 0 e w. L'integrale su C_+ è uguale a prima; quello su C_- mi dà, con procedimento analogo a quello di prima, $\sum_{k=0} w^{-k-1} \oint dz z^k f(z)$.] □

14 Teorema dei residui

I coefficienti della serie di Laurent (13.6) sono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \; . \tag{14.1}$$

Per $n \geq 0$, questo riproduce la serie di Taylor, come si vede da (13.4).

Supponiamo tra l'altro che $z_0 = 0$, e che il cerchio di raggio 1 sia all'interno della corona descritta nel teorema 13.5. A questo punto (13.6) diventa $f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$. Questa è la serie di Fourier per $f(e^{i\theta})$, con coefficienti $\alpha_n = a_n\sqrt{2\pi}$. Allo stesso tempo, partendo da una funzione di periodo 2π, posso vederla come funzione del cerchio unitario sul piano complesso, e spesso posso estenderla a un dominio più grande del piano complesso (una corona circolare) con la procedura $e^{in\theta} \to r^n e^{in\theta} \equiv z^n$.

Tra i coefficienti della serie di Laurent, quello con $n = -1$ ha un ruolo particolare.

[Come controllo di consistenza, notiamo che se ho una funzione che si può espandere per Taylor (ora so che basta che sia olomorfa!),

$$\int dz \frac{f(z)}{z} = \int dz \sum_k \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^{k-1} = f(0) \tag{14.2}$$

perché sappiamo calcolare esplicitamente $\int dz z^{k+1} = 2\pi i \delta_{k+2,0}$; ma questo naturalmente è lo stesso conto che abbiamo fatto prima.]

Definizione 14.1. Il coefficiente della parte in $1/w$ dello sviluppo (13.6) si dice **residuo**, e verrà denotato $\mathrm{Res}_f(z_0)$. Una funzione il cui sviluppo parte da $1/w^k$ si dice avere un **polo** di ordine k.

Naturalmente le funzioni $1/w^k$ sono il primo esempio che viene in mente di funzioni con un polo, ma anche $f(w)/w^k$ con $f(w)$ olomorfa.

Definizione 14.2. Una funzione olomorfa tranne che per un numero finito di poli si dice meromorfa.

Non tutte le funzioni sono meromorfe.

Definizione 14.3. Una punto z_0 si dice singolarità essenziale per la funzione $f(z)$ se la serie di Laurent si estende fino a $n = -\infty$.

Esempio 14.1. La funzione e^{1/z^2} ha una singolarità essenziale in $z = 0$.

Per singolarità polari, si ha che $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Per le singolarità essenziali, si ha l'incredibile

Teorema 14.1. *(di Picard). Dato un intorno I di z_0, per ogni numero complesso α tranne al più uno, esistono infiniti punti $z_i \in I$ in cui $f(z_i) = \alpha$.*

A questo punto abbiamo, dal teorema di Cauchy,

Teorema 14.2. *Sia f olomorfa in un aperto A; sia γ una curva chiusa in A, che contiene* *al suo interno solo un numero finito n di singolarità isolate. Allora vale*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_f(z_i) \ . \tag{14.3}$$

Proof. Basta deformare γ in una somma di circoletti attorno alle varie singolarità. A questo punto si può usare (14.1) per $n = -1$. $\square$

Questo teorema è molto utile anche per calcolare integrali sull'asse reale! Una strategia comune è di prendere un cammino da $-R$ a R sull'asse reale, e chiudiamolo con un semicerchio s di raggio R sul semipiano superiore. A questo punto si fa tendere $R \to \infty$. Vedremo molti esempi ad esercitazioni, ma per ora vediamone uno semplice semplice:

Esempio 14.2. Sia $f(z) = \frac{e^{ix}}{1+z^2}$:

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = -\oint_s \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz + 2\pi i \mathrm{Res}_f(z = i) \ . \tag{14.4}$$

L'integrale su s è $\leq R\mathrm{max}_s f = \frac{R}{\mathrm{min}_s(1+z^2)} = \frac{R}{R^2-1}$. Quindi, prendendo $R \to \infty$, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e} \ . \tag{14.5}$$

15 Tagli.

Quando abbiamo introdotto le funzioni olomorfe, vi ho detto che moralmente si tratta di funzioni "che non dipendono da $\bar{z}$". Anche una funzione che non dipende da $\bar{z}$, però, può non essere olomorfa. Abbiamo già visto una possibile sorgente di problemi: singolarità del tipo $1/z^k$. In questo caso, la funzione non è nemmeno definita in $z = 0$, quindi non c'è da stupirsi che non sia olomorfa. Ora invece vedremo un possibile problema un po' più sottile.

Esempio 15.1. La funzione $f(z) = \sqrt{z}$. In $z = 0$, la definizione ci dice di calcolare $\lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{z}}{z} = \infty$. Non c'è niente di strano: come funzione di variabile reale, $f(x) = \sqrt{x}$ non è derivabile in zero.

C'è però un punto più interessante da notare su questa funzione. Per prima cosa, la funzione di variabile reale $f(x) = \sqrt{x}$ è definita solo su $x \geq 0$. Anche su questo dominio, la definizione è ambigua: ci sono due possibili radici (di solito si sceglie per convenzione quella positiva).

Lavorando sui numeri complessi, non ci dovrebbe più nessun problema a definire la funzione anche su $x < 0$ – questo era esattamente il punto di introdurre i! Se però scriviamo $z = re^{i\theta}$, vediamo che l'ambiguità che torna dicevamo prima: difatti $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}$. Usando questa definizione, partiamo da $\theta = 0$ e giriamo in senso antiorario fino a $\theta = \pi$, o giriamo in senso antiorario fino a $\theta = -\pi$. Nel primo modo otteniamo $e^{i\pi/2}\sqrt{r} = i\sqrt{r}$; nel secondo $e^{-i\pi/2}\sqrt{r} = -i\sqrt{r}$.

Quel che possiamo fare è definire la funzione su tutto $\mathbb{C}$ tranne il semiasse $x < 0$, dove la funzione diventa discontinua.

Definizione 15.1. Un un punto z_0 si dice *punto di diramazione* per $f(z)$ se, per ogni curva γ che gira attorno a z_0, seguendo $f(z)$ lungo γ, si trova un valore diverso da quello di partenza. L'*ordine* di un punto di diramazione è il numero di giri (possibilmente infinito) che bisogna fare lungo γ per ritrovare lo stesso valore.

Si chiama *taglio* una curva di discontinuità che parte da punti di diramazione. Un taglio può andare dal punto di diramazione all'infinito, o congiungere due punti di diramazione. (Vedremo più in là che $z = \infty$ può essere visto anch'esso come un punto di diramazione.)

Esempio 15.2. Tornando a $f(z) = \sqrt{z}$, avevamo visto che $z = 0$ è un punto di diramazione. Nella nostra discussione, avevamo definito $\sqrt{z}$ in modo che avesse un taglio lungo $x < 0$. Si può mettere un taglio dove ci va, in realtà, anche non necessariamente lungo una retta.

Simili considerazioni valgono per tutte le $f(z) = z^\alpha$ con α reale ma non intero.

Un esempio di taglio che congiunge due punti di diramazione è $\sqrt{z(z-1)}$.

Esempio 15.3. Un altro esempio canonico di funzione con tagli è $\log(z) = \log(r) + i\theta$. Questa volta il punto di diramazione è di ordine infinito.

Ora vedremo un po' di proprietà delle funzioni olomorfe.

Una conseguenza interessante dell'analiticità delle funzioni olomorfe è:

Teorema 15.1. *Gli zeri delle funzioni olomorfe sono isolati. Non hanno punti di accumulazione.*

Proof. Attorno a uno zero z_0 di ordine k, la funzione è $(z-z_0)^m + O((z-z_0)^{m+1})$. Quindi lo zero è isolato!

Se esistesse un punto di accumulazione z_A degli zeri di f, potrei calcolare il limite $\lim_{z\to z_A} f(z)$ seguendo una successione di zeri. Allora z_A sarebbe uno zero esso stesso. Ma a quel punto non sarebbe isolato. □

Quindi non posso avere una funzione olomorfa con zeri su un segmento, per esempio.

Una conseguenza ulteriore di questo fatto è il concetto di continuazione analitica.

Definizione 15.2. Sia f una funzione olomorfa in un aperto A, e A' un altro aperto tale che ha intersezione non nulla con A. Diciamo che che f può essere continuata analiticamente a A' se esiste f' olomorfa in A' tale che $f = f'$ su $A \cap A'$.

Teorema 15.2. *La continuazione analitica, quando esiste, è unica.*

Proof. Supponiamo per assurdo che esistano due diverse continuazioni analitiche f_1 e f_2 olomorfe in A'. Su $A \cap A'$ sono entrambe uguali a f, e quindi uguali tra di loro. Ma allora $f_1 - f_2$ è una funzione olomorfa in A' che si annulla su un aperto. Questo è in contraddizione con il teorema 15.1. □

Per finire, in certi contesti è utile estendere il concetto di funzione olomorfa dal piano $\mathbb{C}$ alla "sfera di Riemann" $\mathbb{C} \cup \{z = \infty\}$. Questo si fa definendo

$$z' = \frac{1}{z} \ . \tag{15.1}$$

Definizione 15.3. Una funzione $f(z)$ è detta essere olomorfa in $z = \infty$ se $f\left(\frac{1}{z}\right)$ è olomorfa in $z = 0$.

Teorema 15.3. *Una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \cup \{z = \infty\}$ è costante.*

Proof. Se f è olomorfa attorno a $z = 0$, il suo sviluppo di Laurent è $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Quindi lo sviluppo attorno a $z = \infty$ ha solo termini negativi: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z')^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} a_{-k} (z')^k$. Ma se davvero la funzione è olomorfa attorno a $z' = 0$, l'unico termine non nullo è a_0. □

Questo teorema risulta utile per stabilire che due funzioni sono uguali, come vedremo a esercitazioni.

Teorema 15.4. *Ogni polinomio $P(z)$ ha radici in $\mathbb{C}$: $\exists z_0 \mid P(z_0) = 0$.*

Proof. Se P non avesse radici, la funzione $\frac{1}{P(z)}$ sarebbe olomorfa al finito. Però sarebbe anche olomorfa in $z = \infty$, perché $\frac{1}{a_0 + \ldots a_k z^k} = \frac{1}{a_0 + \ldots a_k (z')^{-k}} = \frac{(z')^k}{a_k + \ldots + a_0 (z')^k}$. □

Una volta che abbiamo stabilito che $z = \infty$ è in un certo senso un punto come gli altri, possiamo "ruotare" sfera di Riemann in modo olomorfo.

Esempio 15.4. La trasformazione

$$z \to f(z) = \frac{-iz+1}{z-i} \tag{15.2}$$

manda la sfera di Riemann in sé stessa; in particolare, manda il disco $\{|z| \le 1\}$ nel semipiano superiore $\{y > 0\}$.

Più in generale, le trasformazioni $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ sono *biolomorfismi*: sono mappe biiettive della sfera di Riemann in sé stessa, e olomorfe.