Compito di Matematica per la Fisica

9/9/2010

1. I pericoli possono nascere dai punti in cui si annulla il denominatore. Questo succede quando $\cos(ae^{i\theta}) = 0$, ovvero quando $ae^{i\theta} = (k + 1/2)\pi$, con k intero. Questo succede quando $(k+1/2)\pi$ (k ora intero e positivo), e $\theta = 0$ o π. Quando a assume questi valori, $ae^{i\theta} \sim a+ia\theta+\ldots$, e quindi (per Taylor) $\cos(ae^{i\theta}) \sim \cos(a)-ia\theta\sin(a)+\ldots = \pm ia\theta$. Insomma si tratta di uno zero semplice, la funzione diverge come $1/x$ e l'integrale non esiste. Quindi l'integrale esiste quando

$$a \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \ . \tag{1}$$

Forse è anche più facile arrivare a questo risultato a posteriori, provando a fare l'integrale (ed è quel che vi ho consigliato a voce durante il compito).

Ora calcoliamo l'integrale. Poniamo $z = ae^{i\theta}$. Si ha $dz = id\theta ae^{i\theta}$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{\cos(ae^{i\theta})}d\theta = \oint_{|z|=a} \frac{z/a}{\cos(z)}\frac{dz}{ia} = \frac{1}{ia^2}\oint_{|z|=a}\frac{zdz}{\cos(z)} \ .$$

A questo punto cerchiamo i poli. Sono dove si annulla $\cos(z)$, cioè nei punti trovati prima:

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \ , \qquad k \in \mathbb{Z} \ . \tag{2}$$

Già che ci siamo, calcoliamo tutti i residui. Era ammesso calcolarsi solo quelli che servono, ma tanto io farò anche la parte facoltativa, e per quella servono tutti! Abbiamo:

$$\mathrm{Res}_{z=(k+1/2)\pi}\frac{z}{\cos(z)} = \left(\frac{z}{-\sin(z)}\right)_{z=(k+1/2)\pi} = \frac{(k+1/2)\pi}{-(-)^k} = (-)^{k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \ . \tag{3}$$

Per $a = \pi$, i poli all'interno del cerchio sono in $\pm\pi/2$, che corrispondono a $k = -1$ e $k = 0$. Da (3) leggiamo che i residui sono entrambi $-\pi/2$. Quindi otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{\cos(ae^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{ia^2}\oint_{|z|=a}\frac{zdz}{\cos(z)} = \frac{1}{ia^2}\,2\pi i\,(-\pi) = -2\frac{\pi^2}{a^2} = -2 \ . \tag{4}$$

Per $a = 2\pi$, ci sono altri due poli: quelli in $\pm(3/2)\pi$, che corrispondono a $k = -2$ e $k = 1$. Da (3) leggiamo che i residui sono entrambi $(3/2)\pi$. Quindi la somma dei residui fa $-\pi + 3\pi = 2\pi$, e in questo caso abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{\cos(ae^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{ia^2}\oint_{|z|=a}\frac{zdz}{\cos(z)} = \frac{1}{ia^2}\,2\pi i\,(2\pi) = 4\frac{\pi^2}{a^2} = 1 \ . \tag{5}$$

Per il caso $a = k\pi$, generalizzando quanto visto vediamo che la somma dei residui è

$$\sum_{j=1}^{k} (-)^j (2j-1)\pi = (-)^k k\pi \tag{6}$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{\cos(ae^{i\theta})} d\theta = \frac{1}{ia^2} \oint_{|z|=a} \frac{zdz}{\cos(z)} = \frac{1}{ia^2}\, 2\pi i\, (-)^k (k\pi) = 2(-)^k k \frac{\pi^2}{a^2} = (-)^k \frac{2}{k} \ . \tag{7}$$

2. Non è facile calcolare $\hat{f}$. È meglio non provarci nemmeno, e usare Parseval sesquilineare:

$$\int f\bar{g} dx = \int \hat{f}\overline{\hat{g}} dp \ . \tag{8}$$

[Ho messo questo trucco perché agli orali mi sembrava che la gente sapesse sempre abbastanza bene questa formula. Scusatemi, non era mia intenzione tendervi un tranello diabolico.] Applicando questa a $\partial_x f$ e f:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x f \bar{f} dx = \int_{-\infty}^{\infty} ip\hat{f}\,\overline{\hat{f}} dp = \int_{-\infty}^{\infty} ip|\hat{f}|^2 dp \ .$$

L'integrando al primo membro si calcola facilmente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(1+ix+x^2)}{(1+x^2)^2} dx \ . \tag{9}$$

Questo si calcola facilmente col teorema dei residui, per esempio chiudendo il contorno nel semipiano superiore. L'unico residuo da calcolare è allora in $x = i$:

$$\mathrm{Res}_{z=i} \left(\frac{i(1+iz+z^2)}{(1+z^2)^2} \right) = \partial_x \left(\frac{i(1+iz+z^2)}{(z+i)^2} \right)_{z=i} = \frac{1}{2} \ .$$

Quindi l'integrale (9) risulta $2\pi i/2 = \pi i$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} ip|\hat{f}|^2 dp = -i(\pi i) = \pi \ . \tag{10}$$

3. La successione converge puntualmente a zero, per via del fattore $\cos(x)^k$. Per vedere se vi converge anche in norma L^1, dobbiamo calcolare

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{\cos^k(x)}{x^{1/2k}} dx \ . \tag{11}$$

Per scambiare limite e integrale, basta usare il teorema della convergenza dominata. Come funzione "dominante" si può prendere $1/\sqrt{x}$:

$$\frac{\cos^k(x)}{x^{1/2k}} \leq \frac{1}{x^{1/2k}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \ ; \tag{12}$$

l'ultimo passaggio segue da $x^{1/2k} \geq x^{\frac{1}{2}}$ (che è vero per $x \leq 1$).

Quindi si può scambiare il limite e l'integrale in (11). Visto che il limite puntuale dell'integrando fa zero, il risultato è zero. Quindi la successione converge anche in norma.