Soluzione del compito di Matematica per la Fisica

9/7/2010

1A. Per $a \notin \mathbb{Z}$, si calcola:

$$\sqrt{2\pi}\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)e^{-inx}dx = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i(a-n)x} - e^{-i(a+n)x})dx =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)}\right) - \left(\frac{e^{-i(a+n)x}}{-i(a+n)}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a-n)\pi} - e^{-i(a-n)\pi}}{a-n} + \frac{e^{-i(a+n)\pi} - e^{i(a+n)\pi}}{a+n}\right) =$$

$$-i(-)^n \sin(a\pi)\left(\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n}\right) = 2i(-)^n \sin(a\pi)\frac{n}{n^2-a^2}\ .$$

Quindi

$$a_n(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}i(-)^n \sin(a\pi)\frac{n}{n^2-a^2} \qquad (a \notin \mathbb{Z})\ . \tag{1}$$

Per $a \in \mathbb{Z}$, quest'espressione non è valida perché staremmo dividendo per zero: il denominatore si annulla per $n = \pm a$. In questo caso, però, la risposta è ancora più semplice. Chiamiamo $\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}$. Posto $a = m$ (per ricordarci meglio che è un intero:)

$$\sin(mx) = \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\psi_m - \psi_{-m}) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_n(m) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}}i & n = m \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}i & n = -m \\ 0 & \text{altrimenti}\ . \end{cases} \tag{2}$$

1B. Prendiamo l'espressione (1) e facciamone il limite per $a \to 1$. Se $n \neq \pm 1$, il limite fa zero. Se $n = 1$: Basta notare che

$$\lim_{a\to 1}\frac{\sin(\pi a)}{1-a^2} = \lim_{a\to 1}\frac{-\sin(\pi(a-1))}{(1+a)(1-a)} = \lim_{a'\to 0}\frac{\sin(\pi a')}{(a'+2)a'} = \frac{\pi}{2}\ .$$

Un conto simile dà lo stesso risultato per $n = -1$. Confrontando con (2) per $m = 1$, troviamo che i risultati coincidono:

$$\lim_{a\to 1}\alpha_m(a) = \alpha_m(1)\ . \tag{3}$$

Ci si poteva aspettare questo risultato, perché $\lim_{a\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ax)e^{-inx} = \int_{-\pi}^{\pi}\lim_{a\to 1}\sin(ax)e^{-inx}$: si può scambiare il simbolo di integrale con quello di limite, per esempio per il teorema della convergenza dominata.

2A. La funzione $\frac{1}{\sin(z)}$ ha poli negli zeri di $\sin(z)$, che si trovano in $e^{iz} = e^{-iz}$, cioè in $z = k\pi$, con k intero. Siccome questi zeri di $\sin(z)$ sono di ordine 1, i poli di $\frac{1}{\sin(Z)}$ sono di ordine 1.

La funzione assegnata è però $\frac{z^2-\pi^2}{\sin(z)}$; il numeratore si annulla in $z = \pm\pi$, che sono due degli zeri del denominatore. Quindi la funzione $\frac{z^2-\pi^2}{\sin(z)}$ ha poli semplici in

$$z = k\pi \ , \qquad \mathbb{Z} \ni k \neq \pm 1 \ . \tag{4}$$

2B. Per $k \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{z=k\pi}\left(\frac{z^2-\pi^2}{\sin(z)}\right) = \lim_{z\to k\pi}\left((z-k\pi)\frac{z^2-\pi^2}{\sin(z)}\right) \\ &= \lim_{z'\to 0}\left((z')\frac{(z'+k\pi)^2-\pi^2}{\sin(z'+k\pi)}\right) = \lim_{z'\to 0}\left((z')\frac{(z'+k\pi)^2-\pi^2}{(-)^k\sin(z')}\right) = (-)^k(k^2-1)\pi^2 \ . \end{aligned}$$

3A. Per la funzione f, dobbiamo preoccuparci dell'andamento in $x = 0$ e $x = \infty$:

$$f(x) \sim x^{-1/4} \ \ (x \to 0) \ , \qquad f(x) \sim x^{-5/4} \ \ (x \to \infty) \ . \tag{5}$$

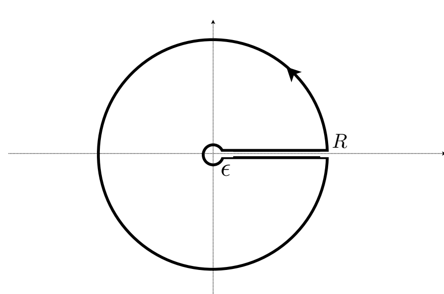
Visto che $-1/2 > -1$ e $-5/2 < -1$, $f \in L^2(0,\infty)$.

Per la funzione g, basta preoccuparci dell'andamento all'infinito, che è $\sim x^{-1}$. Quindi $g \in L^2(0,\infty)$.

3B. Il prodotto interno $(f,g) = \int_0^\infty \bar{f}(x)g(x)dx$. Quindi dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/4}(1+x^2)}dx \ . \tag{6}$$

Questo si può calcolare promuovendo x a una variabile complessa z; l'integrando diventa allora una funzione $I(z) = \frac{z^{-1/4}}{(1+z^2)}$ con un punto di diramazione in $z = 0$. Mettiamo un taglio lungo il semiasse reale positivo, e usiamo il solito contorno di integrazione



I contributi che vengono dall'integrale di $I(z)$ sopra e sotto l'asse reale danno

$$(1 - e^{-\frac{\pi}{2}i}) \int \frac{1}{x^{1/4}(1+x^2)} dx \ . \tag{7}$$

Il contributo del cerchio vicino al punto di diramazione va a zero come $\epsilon^{3/4}$; quello del cerchio grande va a zero come $R^{-5/4}$. L'integrale (7) può ora essere valutato con il teorema dei residui. I poli sono in $z_\pm = \pm i$. Aver preso il taglio come in figura vuol dire che, nella rappresentazione polare dei numeri complessi $z = re^{i\theta}$, dobbiamo restringerci a $\theta \in (0, 2\pi)$. Quindi dobbiamo esprimere i due poli come

$$z_+ = e^{\frac{\pi}{2}i} \ , \qquad z_- = e^{\frac{3}{2}\pi i} \ . \tag{8}$$

Per semplificare i conti, visto che i poli sono di ordine 1, possiamo usare il trucco $\mathrm{Res}_{z=z_0}(\frac{n(z)}{d(z)}) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}$:

$$\mathrm{Res}_{z=z_\pm}(\frac{z^{-1/4}}{1+z^2}) = \frac{z^{-1/4}}{2z}|_{z=z_\pm} = \frac{1}{2} z_\pm^{-5/4} \ . \tag{9}$$

Ora basta usare (7) e il teorema dei residui.

$$\int \frac{1}{x^{1/4}(1+x^2)} dx = 2\pi i \frac{\frac{1}{2}e^{-(5/8)\pi i} + \frac{1}{2}e^{-(15/8)\pi i}}{(1 - e^{-\frac{\pi}{2}i})} = \pi i \frac{e^{-(5/8)\pi i} + \frac{1}{2}e^{-(15/8)\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} =$$
$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}(e^{-(5/8)\pi i} + e^{-(15/8)\pi i}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(e^{-(3/8)\pi i} + e^{-(13/8)\pi i}) =$$
$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}(e^{-(3/8)\pi i} + e^{(3/8)\pi i}) = \sqrt{2}\pi \cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) \ .$$