Soluzione del compito di Matematica per la Fisica

7/6/2010

1A. Per $x \to \pm\infty$, la funzione $f(x)$ va a zero come $\frac{1}{x}$. Quindi non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.

1B. Per calcolare l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^3+i} e^{-ixp} dx \tag{1}$$

conviene usare un contorno costituito dall'intervallo $[-R, R]$ più un semicerchio di raggio R centrato nell'origine. Occorre distinguere i casi $p < 0$ e $p > 0$: nel primo caso, si può applicare il lemma di Jordan se il semicerchio è nel semipiano superiore; nel secondo caso, se il semicerchio è nel semipiano inferiore.

I residui si trovano nei punti z_i, $i = 1, 2, 3$, tali che $z^3 = -i$, cioè

$$z_1 = e^{(\pi/2)i} = i \, , \qquad z_2 = e^{(7/6)\pi i} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \, , \qquad z_3 = e^{-(\pi/6)i} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) \, . \tag{2}$$

z_1 si trova nel semipiano superiore; z_2 e z_3 nel semipiano inferiore. I poli sono tutti del prim'ordine; si può quindi usare, se si vuole, che $\mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$. Si ha quindi

$$\mathrm{Res}_{z=z_i}\left(\frac{z^2 e^{-ipz}}{z^3+i}\right) = \frac{z_i^2 e^{-ipz_i}}{3z_i^2} = \frac{1}{3} e^{-ipz_i} \, . \tag{3}$$

Per $p < 0$ si allora si ha

$$(p<0): \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^3+i} e^{-ixp} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1}\left(\frac{z^2 e^{-ipz}}{z^3+i}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} i e^{p} \; ; \tag{4}$$

mentre per $p > 0$ si ha

$$(p>0): \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^3+i} e^{-ixp} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2\pi i) \sum_{i=2}^{3} \mathrm{Res}_{z=z_i}\left(\frac{z^2 e^{-ipz}}{z^3+i}\right) = \\ -\frac{\sqrt{2\pi}}{3} i (e^{\frac{i}{2}(\sqrt{3}+i)p} + e^{-\frac{i}{2}(\sqrt{3}-i)p}) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{3} 2ie^{-p/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p\right) \, . \tag{5}$$

Notate che la trasformata non è definita per $p = 0$, perché la funzione non è in L^1.

1C. Da (4) si ha

$$\lim_{p \to 0^-} \hat{f}(p) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} i \, , \tag{6}$$

mentre da (5) si ha

$$\lim_{p\to 0^+} \hat{f}(p) = -\frac{2}{3}\sqrt{2\pi}i \ . \tag{7}$$

Quindi $\hat{f}(p)$ non è continua.

Sappiamo in generale che $f \in L^1 \ \Rightarrow \ \hat{f}$ è continua. La contronominale di questa affermazione èhe $\hat{f}$ non è continua $\Rightarrow \ f \notin L^1$.

Nel nostro caso, quindi, la risposta al quesito **1C** (cioè che $\hat{f}(p)$ non è continua) implica la risposta al quesito **1A** (cioè che $f(x) \notin L^1$).

2. Conviene definire $z = e^{i\theta}$; in termini di z, l'integrale assegnato diventa un integrale su un cerchio γ di raggio unitario all'interno del piano complesso:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tanh(e^{i\theta})}{\cos(\theta)+2} d\theta = \oint_\gamma \frac{\tanh(z)}{\frac{1}{2}(z+z^{-1})+2}\frac{dz}{iz} = -2i \oint_\gamma \frac{\tanh(z)}{z^2+4z+1} dz \ . \tag{8}$$

L'integrale a cui siamo arrivati si può valutare usando il teorema dei residui. Il denominatore si fattorizza come $(z-z_+)(z-z_-)$, dove $z_\pm = -2 \pm \sqrt{3}$ sono le due radici. Di queste, z_- è al di fuori del contorno di integrazione, mentre z_+ è dentro. (Anche $\tanh(z)$ ha delle singolarità: $\tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, quindi bisogna fare attenzione ai punti in cui $e^z = -e^{-z}$, cioè $e^{2z} = -1$; questi si trovano in $z = \pm\pi/2, \pm(3/2)\pi i, \ldots$. Quindi sono tutti fuori dal cerchio unitario, e li possiamo ignorare. Non mi aspettavo che nessuno discutesse questo punto.) Occorre quindi valutare

$$\mathrm{Res}_{z=z_+}\left(\frac{\tanh(z)}{(z-z_+)(z-z_-)}\right) = \frac{\tanh(z_+)}{z_+ - z_-} = \frac{\tanh(-2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} \ . \tag{9}$$

L'integrale da valutare vale quindi

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tanh(-2+\sqrt{3}) \ . \tag{10}$$

3. Per $x \to 0$, si ha che $g_\beta \sim x^{\frac{1}{2}-\beta}$. Affinché g_β sia in L^p, si deve quindi richiedere che $p\left(\frac{1}{2}-\beta\right) > -1$, o in altre parole

$$\beta < \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \ . \tag{11}$$

Per $x \to \pi/2$, si ha invece che $g_\beta \sim \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-1/2}$. Affinché g_β sia in L^p, si deve richiedere che $p\left(-\frac{1}{2}\right) > -1$, o in altre parole

$$p < 2 \ . \tag{12}$$

Da (12) segue allora che g_β non può appartenere a L^2 per nessun β. Da (11) segue invece che $g_\beta \in L^1$ se $\beta < 3/2$.