**Soluzione del compito di Matematica per la Fisica**

28/1/2010

**1A.** I poli di $\hat{f}_a(p)$ si trovano in $p_\pm - i = \pm\sqrt{a}$, cioè $p_\pm = i \pm \sqrt{a}$. Per $a < 0$, può essere una buona idea usare $a = -\beta^2$ e scrivere $p_\pm = i(1 \pm \beta)$. Per $a = 0$, i due poli si fondono in un polo doppio. Per $a > -1$, entrambi i poli sono nel semipiano superiore; per $a < -1$, $p_-$ passa nel semipiano inferiore. Guardiamo in dettaglio al caso $a > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{ipx}}{(p-i)^2 - a} dp = \qquad (a > 0) \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2\pi i \left( \frac{e^{i(i+\sqrt{a})x}}{2\sqrt{a}} + \frac{e^{i(i-\sqrt{a})x}}{-2\sqrt{a}} \right) & x > 0 \end{cases} = \\
&\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a}} i e^{-x} (e^{i\sqrt{a}x} - e^{-i\sqrt{a}x}) \theta(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-x} \sin(\sqrt{a}x)\theta(x)
\end{aligned} \tag{0.1}
$$

Con un calcolo simile, per $-1 < a < 0$ otteniamo (ricordando $\beta = \sqrt{-a}$)

$$
\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_a) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{-x} \sinh(\beta x)\theta(x) \qquad (-1 < a < 0) ; \tag{0.2}
$$

questa si può anche ottenere sostituendo $a \to -a$ nell'espressione (0.1). Per $a = 0$, l'unica sottigliezza è che il polo è doppio; otteniamo

$$
\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_a) = -\sqrt{2\pi} x e^{-x} \theta(x) \qquad (a = 0) . \tag{0.3}
$$

Non mi offendo normalmente se non fate il calcolo in questo caso, visto che l'abbiamo già fatto in classe e (come vedremo) segue per continuità dai casi precedenti.

Per finire, il caso $a = -1$ (cioè $\beta = 1$) è un po' diverso, perché ormai c'è un polo nel semipiano inferiore:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_a) = \qquad (a < -1) \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} -2\pi i \frac{e^{-(1-\beta)x}}{-2i\beta} & x < 0 \\ 2\pi i \frac{e^{-(1+\beta)x}}{2i\beta} & x > 0 \end{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\beta} \begin{cases} e^{(\beta-1)x} & x < 0 \\ e^{-(1+\beta)x} & x > 0 \end{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\beta|x|-x}}{\beta}
\end{aligned} \tag{0.4}
$$

**1B.** In $a = 0$, $f_a(x)$ è continua: i limiti per $a \to -1$ di (0.1) e (0.2) coincidono con (0.3).

Il caso $a = -1$ è stato escluso perché per tale valore la funzione ha un polo sull'asse reale, e quindi non è in $L^2(\mathbb{R})$ né in $L^1(\mathbb{R})$. Se si prendono i limiti per $a \to -1$ di (0.4) e di (0.2), si ottiene rispettivamente

$$f_- = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + \theta(x)(e^{-2x} - 1)) \qquad \text{e} \qquad f_+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(e^{-2x} - 1)\theta(x) \tag{0.5}$$

che quindi differiscono per una costante. La ragione per questa discontinuità in $a = -1$ è che un polo (quello in $p_-$) ha attraversato il contorno di integrazione, che è lungo l'asse reale.

[I solutori più che abili potevano anche predire la discontinuità in $a = -1$ così:

$$\lim_{a \to -1_-} f_a - \lim_{a \to -1_+} f_a = \lim_{\epsilon \to 0_+} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{p - 2i} \frac{1}{p + i\epsilon} - \frac{1}{p - 2i} \frac{1}{p + i\epsilon} \right) =$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{p - 2i} \left( P\frac{1}{p} - \pi i \delta(p) - P\frac{1}{p} - \pi i \delta(p) \right) \right) = -2\pi i \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{p - 2i} \delta(p) \right) = \pi \mathcal{F}^{-1}(\delta(p)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, ,$$

dove abbiamo usato una formula su $P\frac{1}{p}$ che abbiamo visto a esercitazioni. **Non** mi aspettavo che scriveste questo, né lo richiedevo.]

**2.** Se $0 < q \leq 1$, $\cos(\theta) - q$ si annulla per qualche $\theta$. Attorno a quei punti $\theta_\pm$, detta $\theta' = \theta - \theta_\pm$, la funzione $c(\theta)$ diverge come $\frac{1}{\theta'}$. (Per $q = 1$, $\theta_\pm$ coincidono, lo zero al denominatore è doppio, e $c(\theta)$ diverge come $\frac{1}{(\theta')^2}$). Quindi per questi valori dei parametri la funzione non è integrabile.

Quindi restringiamoci a $q > 1$. Bisogna calcolare

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\theta} d\theta}{\cos(\theta) - q} \, .$$

Usando la solita sostituzione $e^{i\theta} = z$, questo diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-n} dz}{iz \left( \frac{z + z^{-1}}{2} - q \right)} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-n} dz}{z^2 - 2qz + 1} \, .$$

Per $n > 0$, questo ha un polo nell'origine e due poli in

$$z_\pm = q \pm \sqrt{q^2 - 1} \, . \tag{0.6}$$

Per $n \leq 0$, il polo nell'origine non c'è, e il conto è quindi più semplice. Però $c(\theta)$ è pari: quindi $\alpha_{-n} = \alpha_n$. Possiamo perciò limitarci a calcolare

$$\alpha_{-n} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \oint_{|z|=1} \frac{z^n dz}{z^2 - 2qz + 1}$$

per $n \geq 0$. Quali residui si trovano all'interno della circonferenza $|z| = 1$? Sappiamo che $z_+ z_- = 1$; per $q > 0$, $z_\pm = 1$ sono reali e positivi, quindi uno dei due sarà minore di 1 ($z_-$), e l'altro maggiore di 1 ($z_+$). Quindi ci basta calcolare il residuo in $z = z_-$:

$$\alpha_{-n} = \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{z_-^n}{z_- - z_+} = -\sqrt{2\pi} \frac{(q - \sqrt{q^2 - 1})^n}{\sqrt{q^2 - 1}} \ . \tag{0.7}$$

**3A.** Dobbiamo chiederci se esista finito l'integrale $\int_0^\infty |g_{\alpha,\beta}|^p$. C'è da stare attenti al comportamento in $x = 0$, $x = 1$ e per $x \to \infty$.

Per $x = 0$, la funzione va come $x^\alpha$; l'integrale $\int |x^\alpha|^p dx$ va come $\alpha p > -1$.

Per $x = 1$, conviene definire $y = x - 1$; per piccolo $y$, la funzione allora va come

$$\frac{(1+y)^\alpha}{(1 - (1+y)^\beta)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{1 + \alpha y + \dots}{(1 - 1 - \beta y)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{1}{(-\beta y)^{\frac{1}{3}}} \tag{0.8}$$

e quindi l'integrale esiste se $-\frac{p}{3} > -1$.

Per $x \to \infty$, la funzione va come $x^{\alpha - \frac{\beta}{3}}$, e quindi otteniamo $p\left(\alpha - \frac{\beta}{3}\right) < -1$.

**3B.** Per $x < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^{4n+3} = 0$; per $x > 1$, $\lim_{n\to\infty} x^{4n+3} = \infty$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1 - x^{4n+3}|} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \ . \tag{0.9}$$

L'integrale da zero a infinito di questa funzione è chiaramente 1. Ci rimane da capire perché possiamo scambiare limite e integrale. Basta usare il teorema della convergenza dominata. Come dominante possiamo prendere la prima delle funzioni, visto che

$$|1 - x^{4n+3}| > |1 - x^7| \tag{0.10}$$

per $n > 1$.