

Compito di Matematica per la Fisica

25/2/2010

1.

1A. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x + x^3} dx .$$

1B. Integrando la funzione olomorfa $\frac{\log(z)}{(1+z^2)(1+z)}$ lungo un contorno opportuno, calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx .$$

2. Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = xe^{\frac{i}{2}x} \in L^2[-\pi, \pi]$. Si usi il risultato per calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^4} . \tag{0.1}$$

3. Sia $\phi(x) \in L^p(\mathbb{R})$.

3A. Si considerino le funzioni $\phi_n(x) \equiv \phi(x - n)$. La successione $\{\phi_n\}$ converge puntualmente? a che funzione? vi converge anche in norma L^p ?

3B. Si considerino le funzioni $\psi_n(x) \equiv n^\alpha \phi(nx)$, con n intero e $\alpha \in \mathbb{R}$. Per che valori di α la successione $\{\psi_n\}$ converge alla funzione nulla nella norma di L^p ?