Soluzione del compito di Matematica per la Fisica

25/2/2010

1A. Prima di tutto osserviamo che l'integrando è una funzione dispari di x; possiamo quindi calcolare l'integrale da $-\infty$ a ∞ e dividere per due.

Riesprimiamo $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Possiamo dividere ora l'integrale in due pezzi. Nessuno dei due integrandi è una funzione integrabile, ma possiamo definire l'integrale usando la parte principale. Questo non ha alcun effetto sull'integrale di partenza, il cui integrando era in L^1:

$$2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} - P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)} \ .$$

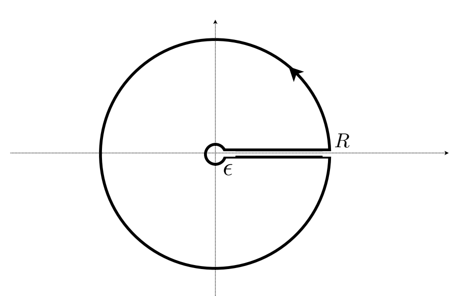
Osserviamo anche che il secondo integrale è il complesso coniugato del primo. Possiamo quindi limitarci a calcolare il primo. Questo si fa scegliendo un contorno costituito da: l'intervallo da $-R$ a $-\epsilon$ sull'asse reale; un semicerchio di raggio ϵ nel semipiano superiore; l'intervallo da ϵ a R sull'asse reale; e infine un semicerchio di raggio R nel semipiano superiore. Nel limite $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$, i due contributi sull'asse reale danno l'integrale cercato; l'integrale sul semicerchio di raggio R va a zero; l'integrale sul semicerchio di raggio ϵ dà un contributo $-\pi i$. Portando quest'ultimo dall'altro lato, otteniamo:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} = 2\pi i \text{Res}(z=i) + \pi i = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i \cdot i} + \pi i = \pi(1-e^{-1}) \ .$$

Mettendo tutto assieme, otteniamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}) \ .$$

1B. La funzione $\frac{\log(z)}{(1+z^2)(1+z)}$ ha un punto di diramazione in $z=0$; possiamo posizionare il taglio sul semiasse reale positivo. Usiamo il solito contorno di integrazione "alla Pac–Man" (due segmenti da ϵ a R, l'uno appena sopra e l'altro sotto il taglio; un cerchio di raggio ϵ e uno di raggio R, centrati attorno al punto di diramazione):



notiamo che i contributi che vengono dall'integrale sopra e sotto l'asse reale danno

$$\int_{\mathrm{Pac-Man}} \frac{\log(z)}{(1+z^2)(1+z)} dz = \int_0^\infty \frac{\log(x) - (\log x^{e^{2\pi i}})}{(1+x^2)(1+x)} =$$
$$\int_0^\infty \frac{\log(x) - (\log x + 2\pi i)}{(1+x^2)(1+x)} = -2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x)} \ .$$

Questo è proporzionale all'integrale da calcolare. Ora calcoliamo l'integrale usando il teorema dei residui. Troviamo:

$$\int_{\mathrm{Pac-Man}} \frac{\log(z)}{(1+z^2)(1+z)} dz = 2\pi i \left(\frac{i\pi/2}{(2i)(1+i)} + \frac{3i\pi/2}{(-2i)(1-i)} + \frac{\pi i}{2} \right) =$$
$$(\pi i)^2 \left(\frac{1}{2(-1+i)} + \frac{3}{2(-1-i)} + 1 \right) = -\frac{\pi^2}{2} i$$

Mettendo tutto assieme, si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} \ .$$

2. I coefficienti si calcolano con un'integrazione per parti. Si ottiene

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{i\left(\frac{1}{2}-n\right)x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-)^n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \ .$$

Possiamo adesso usare la formula di Parseval $\int |f|^2 dx = (f,f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$. Questo dà:

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^4} + \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^4} \right) \ .$$

Possiamo riesprimere la seconda somma come

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(-n-\frac{1}{2}\right)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^4}$$

e scopriamo quindi che ha la stessa forma della prima. Otteniamo allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^4}{6} \ .$$

3A. Le funzioni ϕ_n non sono altro che una traslazione della funzione ϕ. Per x fisso, il valore di ϕ_n andrà quindi a zero[1]: $\lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\phi(x-n) = 0$, dato che ϕ va a zero all'infinito.

Quanto alla convergenza in norma, l'integrale di una funzione non cambia per traslazione: quindi la successione non converge. In formule: $\int |\phi_n(x)|^p dx = \int |\phi(x-n)|^p dx = \int |\phi(x)|^p dx = (||\phi||_p)^p$.

3B. Possiamo scrivere

$$\int |\psi_n(x)|^p dx = \int |n^\alpha \phi(nx)|^p dx = n^{p\alpha} \int |\phi(\tilde{x})|^p d\left(\frac{\tilde{x}}{n}\right) = n^{p\alpha-1}(||\phi||_p)^p$$

La successione converge quindi alla funzione nulla per $p\alpha - 1 < 0$;in altre parole, quando $\alpha < \frac{1}{p}$.

[1]Visto che mi ero scordato di specificare che il $\lim_{x\to-\infty}\phi(x) = 0$, in realtà possiamo solo concludere che la successione converge a zero quasi ovunque; questo è stato un mio errore.