Compito di Matematica per la Fisica

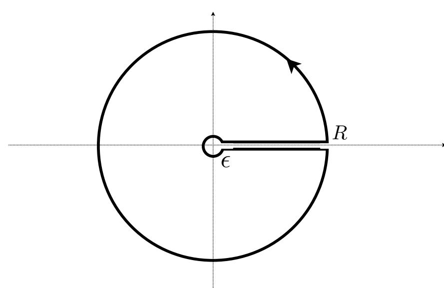
15/10/2010

1.

$$\sqrt{2\pi}\hat{f} = \int_0^\infty \cos(x)e^{-x-ipx}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{x(-1+i(1-p))} + e^{x(-1-i(1+p))}\right)dx =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-i(1-p)} + \frac{1}{1+i(1+p)}\right] = \frac{1+ip}{(1+ip)^2+1} = \frac{1+ip}{2-p^2+2ip} \ .$$

La funzione non è in $L^1(\mathbb{R})$, perché va all'infinito come $1/p$. Potevamo prevederlo: se $\hat{f}$ fosse stata in $L^1(\mathbb{R})$, la sua antitrasformata $f(x)$ sarebbe stata continua (questo è l'analogo per l'antitrasformata di un teorema che abbiamo visto per la trasformata: $f \in L^1 \ \Rightarrow \ \hat{f}$ è continua).

2. Usando per esempio il solito contorno



abbiamo che l'integrale lungo il cerchio di raggio ϵ va a zero come $\sim \epsilon^{3/2}$, mentre l'integrale lungo il cerchio di raggio R va a zero come $R^{-1/2}$. I residui che ci interessano sono

$$\mathrm{Res}_{z=i=e^{\pi i/2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{z}}{z+i}\right)_{z=e^{\pi i/2}} = \frac{e^{\pi i/4}}{2i} \ ,$$
$$\mathrm{Res}_{z=-i=e^{3\pi i/2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{z}}{z-i}\right)_{z=e^{3\pi/2}} = \frac{e^{3\pi i/4}}{-2i} \ .$$

(La radice è stata scelta facendo attenzione alla posizione del taglio, come per esercizi visti in precedenza.) Quindi, chiamando A la parte di percorso appena sopra il semiasse reale positivo:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_A \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}dz = \pi i\left(\mathrm{Res}_{z=e^{\pi i/2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\right) + \mathrm{Res}_{z=e^{3\pi i/2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}\right)\right) =$$
$$\frac{\pi}{2}(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4}) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ .$$

3.

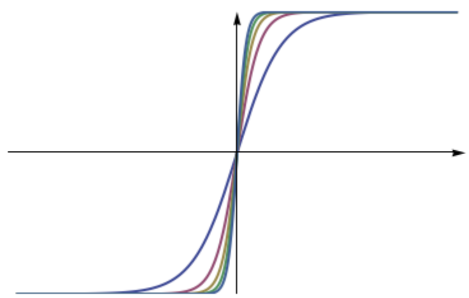
Per $x = 0$, $\phi_n(x) = 0\ \forall n$. Per $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \tanh(nx) = \lim_{y\to\pm\infty} \tanh(y) = \pm 1\ .$$

Quindi abbiamo:

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 1\ , & x > 0\ , \\ 0\ , & x = 0\ , \\ -1\ , & x < 0\ . \end{cases}$$

Ecco le prime $\phi_n(x)$:



Nella norma "del sup", la successione ϕ_n non converge a $\rho(x)$. Infatti, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\phi_n - \rho| = 1$, per ogni n. (Questo sup si ottiene per valori di x vicini allo zero.) Quindi le ϕ_n "restano lontane" dalla ρ.

[Tra l'altro, la convergenza nella norma $||\cdot||_\infty$ è la convergenza uniforme: un teorema di analisi I vi dice che una successione di funzioni continue che converge uniformemente converge a una funzione continua. Visto che ρ non è continua, la successione $\{\phi_n\}$ non può convergere uniformemente.]