

## II Compitino di Matematica per la Fisica

14/12/2009

1. Sia  $\alpha$  un numero reale e positivo. Usando le proprietà della trasformata di Fourier, si trovi una soluzione dell'equazione

$$f'' + 2f' + f = \theta(x)e^{-\alpha x} ,$$

tale che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .

2. Usando il metodo dei residui, si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1+x^3} dx .$$

Rispondere alle seguenti domande:

**D1** : Si definisca lo spettro di un operatore. Si definiscano spettro discreto, continuo e residuo. Quale di questi **non** è presente per un operatore autoaggiunto?

**D2** : Che spettro ha, e di che tipo, l'operatore moltiplicazione  $\psi(x) \rightarrow x\psi(x)$  in  $L^2(\mathbb{R})$ ?

**D3** : Cosa si può dire di una funzione olomorfa che si annulla su un segmento?

**D4** : Che forma ha in generale il dominio di convergenza di una serie di Laurent?

**D5** : Si consideri la funzione  $\log(z^2 - 5z + 6)$ . Qual è il raggio di convergenza della sua serie di Taylor attorno a  $z = 0$ ?

**D6** : Cosa possiamo dire su  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  quando  $z_0$  è *i*) un polo e *ii*) una singolarità essenziale?