Soluzione del II Compitino di Matematica per la Fisica

14/12/2009

1. Definiamo $g(x) = \theta(x)e^{-\alpha x}$. Facendo la trasformata di Fourier, si ottiene

$$(1+ip)^2\hat{f} = \hat{g} \ .$$

Ora possiamo procedere in due modi:

a. Con un semplice integrale, otteniamo $\hat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha+ip)}$. Questo ci dice che $\hat{f} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}(p-i)^2(p-i\alpha)}$. Ora possiamo antitrasformare:

$$f = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{ipx}}{(p-i)^2(p-i\alpha)} \ ;$$

possiamo calcolare questo integrale, come al solito, completando il cammino sull'asse reale con una semicirconferenza in $\mathbb{C}$. Per $x < 0$, dobbiamo chiudere con una semicirconferenza nel semipiano $\mathrm{Im}z < 0$, e il cammino chiuso che ne risulta non comprende nessuna singolarità al suo interno; quindi l'integrale dà zero. Per $x > 0$, dobbiamo chiudere con una semicirconferenza nel semipiano $\mathrm{Im}z > 0$. Questo dà:

$$\begin{aligned} f(x>0) &= -\left(\mathrm{Res}_{p=i}\left(\frac{e^{ipx}}{(p-i)^2(p-i\alpha)}\right) + \mathrm{Res}_{p=i\alpha}\left(\frac{e^{ipx}}{(p-i)^2(p-i\alpha)}\right)\right) = \\ &= -\left(\partial_p\left(\frac{e^{ipx}}{(p-i\alpha)}\right)_{p=i} + \left(\frac{e^{ipx}}{(p-i)^2}\right)_{p=i\alpha}\right) \\ &= -\frac{1+t(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2}e^{-t} + \frac{1}{(1-\alpha)^2}e^{-\alpha t} \ . \end{aligned}$$

Quindi concludiamo

$$f = \theta(x)\left(-\frac{1+x(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2}e^{-x} + \frac{1}{(1-\alpha)^2}e^{-\alpha x}\right) \ . \tag{0.1}$$

Notate che abbiamo assunto $\alpha \neq 1$. Per $\alpha = 1$, le due singolarità si fondono a dare un polo di ordine 3, e il conto è un po' diverso. Vi risparmio i dettagli:

$$f = \frac{1}{2}\theta(x)x^2e^{-x} \qquad (\alpha = 1) \ . \tag{0.2}$$

Questo risultato per $\alpha = 1$ si può ottenere da (0.1) prendendo $\alpha \to 1$, perché l'integrando è una funzione continua dei parametri (sul cammino considerato).

b. C'è un secondo metodo, che temo che molti di voi sceglieranno. Io avrei preferito che sceglieste il metodo **a**, che vi porta a fare un integrale più interessante).

Scriviamo cioè

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+ip)^2}\right) * g \ . \tag{0.3}$$

Ora, $\mathcal{F}^{-1}((1+ip)^{-2})$ può essere calcolato con un integrale di contorno sul piano complesso (era un esercizio che abbiamo fatto in classe), o pure trovato facendo la derivata in p del più semplice $\mathcal{F}^{-1}((1+ip)^{-1})$. In ogni caso abbiamo

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+ip)^2}\right) = \sqrt{2\pi}\theta(x)xe^{-x} \ . \tag{0.4}$$

Ora, la convoluzione non è troppo difficile, e si trova

$$\begin{aligned} f = (x\theta(x)e^{-x}) * g &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y)(x-y)e^{-(x-y)}\theta(y)e^{-\alpha y}dy \\ &= e^{-x}\int_0^x (x-y)e^{(1-\alpha)y}dy \qquad (x>0) \end{aligned}$$

mentre per $x < 0$ l'integrale è zero. Questo si fa semplicemente integrando per parti. Con un paio di passaggi otteniamo di nuovo (0.1) e (0.2).

Naturalmente, si può anche ottenere la soluzione tirando a indovinare, specie nel caso $\alpha = 1$; è per questo che ho specificato "usando le proprietà della trasformata di Fourier" nel testo dell'esercizio. Però chi ci ha provato ha ottenuto risultati sbagliati perché non si è chiesto se la soluzione trovata funzionasse in $x = 0$!

Notiamo infine che, visto che l'equazione è lineare, si può ottenere un'altra soluzione sommando a quella che abbiamo ottenuto una qualsiasi soluzione dell'equazione $f''+2f'+f=0$, cioè $f = e^{-x}$. Questa non viene vista dalla trasformata di Fourier, perché non è in nessuno degli spazi che abbiamo studiato.

2. L'integrale si calcola considerando $f = \frac{z\sqrt{z}}{1+z^3}$ come una funzione su $\mathbb{C}$ con un taglio sul semiasse positivo di $\mathbb{R}$ (quindi, da 0 e ∞). Integriamo f su un cammino costituito da un cerchietto di raggio ϵ attorno all'origine, un cerchio di raggio R da subito sopra il taglio a subito sotto, e da due segmenti, uno subito sopra il taglio e uno subito sotto. L'integrale sulle due semicirconferenze tende a zero per $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$. L'integrale sui due segmenti e' l'integrale dà due volte l'integrale cercato. Possiamo ora usare il teorema dei residui. Le singolarità di f si hanno negli zeri di z^3+1. Questi si trovano dove $z^3 = -1 = e^{\pi i}$, e quindi in $z = e^{\pi i}$, $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$ e $z = e^{\frac{5}{3}\pi i}$:

$$z^3 + 1 = (z+1)(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z-e^{\frac{5}{3}\pi i}) \ . \tag{0.5}$$

Troviamo quindi

$$
\begin{aligned}
2\int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{1+x^3}dx = & 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=-1}(f) + \mathrm{Res}_{z=e^{\frac{\pi}{3}i}} + \mathrm{Res}_{z=e^{\frac{5}{3}\pi i}}(f)\right) \\
=& 2\pi i\left(-\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{(e^{\pi i}-e^{\frac{\pi}{3}i})(e^{\pi i}-e^{\frac{5}{3}\pi i})} + \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}e^{\frac{\pi}{6}i}}{(e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{\pi i})(e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{\frac{5}{3}\pi i})} + \frac{e^{\frac{5}{3}\pi i}e^{\frac{5}{6}\pi i}}{(e^{\frac{5}{3}\pi i}-e^{\pi i})(e^{\frac{5}{3}\pi i}-e^{\frac{\pi}{3}i})}\right) \\
=& 2\pi i\frac{1}{(1-e^{-\frac{2}{3}\pi i})(1-e^{\frac{2}{3}\pi i})}(-e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{\frac{\pi}{3}i}e^{\frac{\pi}{6}i-\frac{2}{3}\pi i} + e^{-\frac{\pi}{3}i}e^{\frac{5}{6}\pi i+\frac{2}{3}\pi i}) \\
=& 2\pi i\frac{-i-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{4}{3}\pi\ .
\end{aligned}
$$

Qualcuno ha anche usato un trucco utile che non vi ho mai fatto notare: se z_0 è un polo di ordine 1, $\mathrm{Res}_{z=z_0}(\frac{f}{g}) = \left(\frac{f}{g'}\right)|_{z=z_0}$. (Provate a pensare a perché questo è vero, e a una formula per poli di ordine più alto.) Questo dà lo stesso risultato, con un po' meno conti.

D1 : Lo spettro di un operatore A è definito come l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $A - \lambda 1$ non esiste come operatore limitato su H. Si divide in:

- Spettro discreto: quando $A - \lambda 1$ non è iniettivo.
- Spettro residuo: quando $(A - \lambda 1)^{-1}$ si può definire solo su un sottospazio non denso di H.
- Spettro continuo: se $(A - \lambda 1)$ è iniettivo e riesco a definire densamente $(A - \lambda 1)^{-1}$, ma non come operatore continuo.

Per un operatore autoaggiunto, si dimostra che non c'è spettro residuo.

D2 : L'operatore moltiplicazione $\psi(x) \to x\,\psi(x)$ in $L^2(\mathbb{R})$ ha per spettro tutto $\mathbb{R}$. Si tratta di spettro continuo.

D3 : Una funzione olomorfa che si annulla su un segmento deve necessariamente annullarsi su tutto $\mathbb{C}$.

D4 : Il dominio di convergenza di una serie di Laurent è in generale una corona circolare compresa tra raggi $r_\pm$; è possibile che r_+ sia infinito e/o che r_- sia zero.

D5 : La funzione $\log(z^2 - 5z + 6) = \log((z-2)(z-3))$ ha singolarità in $z = 3$ e $z = 2$. La sua serie di Taylor attorno a $z = 0$ convergerà quindi fino a $z = 1$ escluso; il raggio di convergenza è quindi 2.

D6 : $\lim_{z\to z_0} f(z)$ è ∞ quando z_0 è un polo, e non esiste quando z_0 è una singolarità essenziale.