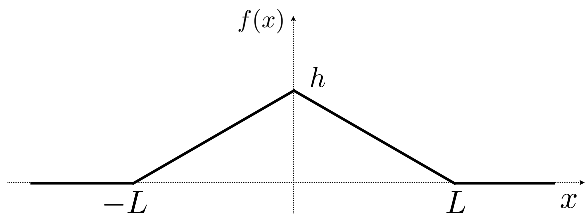
I Compitino di Matematica per la Fisica

17/11/2009

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{h}{L}\max\{L - |x|, 0\} = \begin{cases} (h - \frac{h}{L}|x|) & |x| < L \\ 0 & |x| \geq L \end{cases}$$



1A. Calcolare la trasformata di Fourier di f.

1B. Si consideri ora $g(x) = \sin^2(x) f(x)$; si calcoli la trasformata di Fourier di g.

1C. Torniamo a $\hat{f}(p)$. Quanto vale in $p = 0$? Verificare che è continua in $p = 0$.

1D. Si considerino ora le funzioni $f_n(x)$ ottenute prendendo $h = \frac{1}{n}$ e $L = n$ in $f(x)$. A che funzione converge puntualmente la successione $\{f_n\}$? converge a tale funzione anche nella norma di L^1? Cosa succede nel limite $n \to \infty$ alla successione $\{\hat{f}_n\}$?

2. Consideriamo funzioni dell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2A. Si calcoli $|| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)||^2$.

2B. Dire se la funzione $\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx)$ è in $L^2([-\pi, \pi])$.

2C. Data la successione di funzioni $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \frac{1}{n}} \sin(kx)$, dire se $\psi_n \to \psi$ rispetto alla norma di $L^2([-\pi, \pi])$.

2D*. Data la successione di funzioni $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{k(n + \frac{1}{2} - k)} \sin(kx)$, dire se $\phi_n \to \psi$ rispetto alla norma di $L^2([-\pi, \pi])$.

2E*. Dato ora un numero reale $0 < t < 1$, si sommi esplicitamente la serie $\psi_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} \sin(kx)$. Cosa succede per $t \to 1$?[1]

[1] Può essere utile ricordare che $\arctan x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}$.

Rispondere alle seguenti domande:

D1 : Quando si dice che uno spazio normato è completo?

D2 : Dare la definizione di successione di Cauchy.

D3 : Sia dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Sotto che condizione è $\mathcal{H}$ isomorfo a l^2?

D4 : Cosa possiamo dire sulla trasformata di Fourier di una funzione in $L^1(\mathbb{R})$?

D5 : A cosa è uguale la trasformata di Fourier di una convoluzione $\mathcal{F}(f * g)$?

D6 : Si considerino $L^1([-1,1])$ e $L^2([-1,1])$. C'è una relazione di inclusione tra i due spazi? se sì, quale? Rispondere alla stessa domanda per $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

D7 : Dare un esempio di sistema ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R})$.