Soluzione del I Compitino di Matematica per la Fisica

17/11/2009

1.

1A. Per $p \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2\pi}}{h/L}\hat{f}(p) &= \int_{-L}^{0}(L+x)e^{-ipx}dx + \int_{0}^{L}(L-x)e^{-ipx}dx = \\
&- \int_{-L}^{0}\frac{e^{-ipx}}{-ip}dx + \left((L+x)\frac{e^{-ipx}}{-ip}\right)_{-L}^{0} - \int_{0}^{L}(-1)\frac{e^{-ipx}}{-ip}dx + \left((L-x)\frac{e^{-ipx}}{-ip}\right)_{0}^{L} \\
&= \left(\frac{e^{-ipx}}{p^2}\right)_{-L}^{0} + \frac{L}{-ip} + \left(-\frac{e^{-ipx}}{p^2}\right)_{0}^{L} - \frac{L}{-ip} = \\
&= \frac{-e^{ipL} - e^{-ipL} + 2}{p^2} = \frac{2}{p^2}(1-\cos(Lp)) \ . \qquad (0.1)
\end{aligned}$$

Visto che abbiamo diviso diverse volte per p, il caso $p = 0$ va trattato a parte: $\hat{f}(p=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)dx = \frac{hL}{\sqrt{2\pi}}$.

[Un metodo **più furbo** è il seguente: notiamo che $f''(x) = \frac{h}{L}\Big(\delta(x-L) + \delta(x+L) - 2\delta(x)\Big)$; è quindi immediato calcolare $\mathcal{F}(f'') = \frac{h}{L\sqrt{2\pi}}(e^{ipL} + e^{-ipL} - 2)$. Ma sappiamo che $\mathcal{F}(f'') = -p^2\hat{f}$, da cui segue il risultato (0.1).]

1B. Usando la formula di traslazione $\mathcal{F}(e^{ikx}f(x)) = \hat{f}(p-k)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\sin^2(x)f(x)) &= \mathcal{F}\left(\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 f(x)\right) = -\frac{1}{4}\mathcal{F}\left((e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})f(x)\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\hat{f}(p-2) - 2\hat{f}(p) + \hat{f}(p+2)\right) \ ;
\end{aligned}$$

non mi importava nemmeno troppo che sostituiste $\hat{f}$ in quest'espressione. (Dalle vostre domande, ho visto che molti hanno invece pensato a usare la formula per la trasformata di Fourier di un prodotto. Questo naturalmente porterebbe allo stesso risultato: la formula di traslazione si infatti puo' ottenere in questo modo, volendo.)

1C. Abbiamo visto in precedenza che $\hat{f}(0) = \frac{hL}{\sqrt{2\pi}}$. Si ha anche

$$\lim_{p\to 0}\frac{h}{L}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(Lp)}{p^2} = \frac{h}{L}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{L^2}{2} = \frac{hL}{\sqrt{2\pi}}$$

quindi la funzione $\hat{f}$ è continua. Questo doveva succedere perche' $\mathcal{F}$ di una funzione $\in L^1$ è continua (si veda anche **D4**).

1D. La successione $f_n = \frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(Lp)}{p^2}$ converge puntualmente alla funzione nulla, ma non converge in norma L^1 perche' $\int f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \forall n$.

La successione delle trasformate $\hat{f}_n$ converge puntualmente alla funzione che dà zero per $p \neq 0$, e $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ per $p = 0$.

2.

2A. Possiamo ricordarci che $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ è un sistema ortonormale completo e usare $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, oppure calcolare direttamente che $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx) = \pi\delta_{nk}$. In entrambi i modi, otteniamo

$$||\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)||^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \ .$$

2B. Si ha quindi $||\psi||^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, che è finito (non lo chiedevo, ma sappiamo che è uguale a $\frac{\pi^3}{6}$); quindi ψ appartiene a L^2.

2C. Usando ancora la risposta a **2A**:

$$||\psi_n - \psi||^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k+\frac{1}{n}} - \frac{1}{k}\right|^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k-k-\frac{1}{n}}{k(k+\frac{1}{n})}\right|^2 =$$
$$\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+\frac{1}{n})}\right)^2 < \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\ ;$$

questo è uguale a un certo fattore numerico finito (per la precisione, $\pi^5/90$) per $1/n^2$. Quindi la successione ψ_n converge a ψ nella norma L^2.

2D*. Usando ancora la risposta a **2A**:

$$||\phi_n - \psi||^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{n+\frac{1}{2}}{k\left(n+\frac{1}{2}-k\right)} - \frac{1}{k}\right|^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{n+\frac{1}{2}-n-\frac{1}{2}+k}{k(n+\frac{1}{2}-k)}\right|^2 =$$
$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}-k\right)^2} = \pi\sum_{k=1-n}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-k\right)^2}$$

Questa è sempre maggiore di $\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1/2)^2}$, e anzi sappiamo che converge a $\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k-1/2)^2} = \pi^3$. Quindi la successione ϕ_n **non** converge a ψ nella norma L^2.

[Il motivo per cui questo risultato potrebbe risultare poco intuitivo è che $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{k\left(n+\frac{1}{2}-k\right)} = \frac{1}{k}$. Se volete, potete pensare a $\left\{\frac{n+\frac{1}{2}}{k\left(n+\frac{1}{2}-k\right)}\right\}$ come all'n–esimo termine di una successione in l^2: questa successione converge "puntualmente" (cioè per fisso k) all'elemento $\left\{\frac{1}{k}\right\} \in l^2$, ma non nella norma di l^2.]

2E*. Dalla serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ possiamo ricavare, prendendo la primitiva da entrambi i lati, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x)$. (Avevo indirettamente suggerito la rilevanza del logaritmo nella nota a pie' di pagina nel testo del compito.)

$$\psi_t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} \sin(kx) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(te^{ix})^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(te^{-ix})^k}{k} \right) =$$
$$\frac{1}{2i} \left(-\log(1-te^{ix}) + \log(1-te^{-ix}) \right) = \frac{1}{2i} \log \frac{1-te^{ix}}{1-te^{ix}} =$$
$$\frac{1}{2i} \log \frac{1+i\frac{t\sin(x)}{1-t\cos(x)}}{1-i\frac{t\sin(x)}{1-t\cos(x)}} = \arctan\left(\frac{t\sin(x)}{1-t\cos(x)} \right) .$$

Per $t \to 1$, $\psi_t(x)$ converge puntualmente a:

$$\psi_t \to \arctan\left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \right) = \arctan\left(\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\sin^2(x/2)} \right)$$
$$= \arctan(\cot(x/2)) = -\frac{1}{2} \begin{cases} x-\pi & x>0 \\ x+\pi & x<0 \end{cases} .$$

[Chi ha buona memoria ricorderà che avevamo scritto quest'ultima funzione come $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(kx)$ già a esercitazioni.]

D1 : Quando ogni successione di Cauchy converge (in norma) a un elemento dello spazio.

D2 : $\{x_n\}$ è di Cauchy se $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \mid \forall n, m > N$ si ha $||x_n - x_m|| < \epsilon$.

D3 : Quando $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita ed è separabile.

D4 : È una funzione continua che si annulla all'infinito.

D5 : Al prodotto delle trasformate: più precisamente, $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$.

D6 : $L^2([-1,1]) \subset L^1([-1,1])$. Nel caso di $L^2(\mathbb{R})$ e $L^1(\mathbb{R})$, non c'è inclusione né in un senso né nell'altro.

D7 : Le funzioni di Hermite. [$\phi_n = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n$, con $H_n = (-)^n e^{x^2} \partial^n e^{-x^2}$.]