

COMPITINO II
Dicembre 2007

A Esercizi

A1. Calcolare almeno due dei seguenti integrali

1)
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad a > 0$$

2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ipx}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad p \in \mathbb{R}$$

3)
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{e^z - 1 - z} dz$$

A2. Sviluppare la funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \tag{1}$$

in serie di Taylor o Laurent nelle seguenti regioni

- a) $|z| < 1$
- b) $0 < |z - \mathbf{i}| < 2$
- c) $|z| > 1$

B. Teoria

Discutere brevemente le proprietà delle funzioni olomorfe.

Rispondere poi alle seguenti domande: *non è necessario saper rispondere a tutte.*

a) Qual è un dominio massimale di definizione e olomorfia della funzione

$$\sqrt{z^2 - 4}$$

b) La funzione olomorfa $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, definita in $|z| < 1$, può essere prolungata analiticamente oltre il cerchio unitario? Se sì, qual è il suo dominio naturale di definizione (ammesso che ne abbia uno)?

c) La funzione olomorfa $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n$, definita in $|z| < 1$, può essere prolungata analiticamente oltre il cerchio unitario? Se sì, ha un dominio naturale di definizione?

d) Qual è la funzione olomorfa che ha $x^3 - 3y^2x + 1$ come parte reale.

* e) Esistono due funzioni olomorfe diverse $f(z)$ e $g(z) \neq 0$ con $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/g(z) = 1$ e che abbiano come unica singolarità al finito un polo semplice in $z = 1$?