

**COMPITINO II**  
Dicembre 2007

**A Esercizi**

**A1.** Calcolare almeno due dei seguenti integrali

1) 
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad a > 0$$

2) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ipx}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad p \in \mathbb{R}$$

3) 
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{e^z - 1 - z} dz$$

**A2.** Sviluppare la funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \tag{1}$$

in serie di Taylor o Laurent nelle seguenti regioni

- a)  $|z| < 1$
- b)  $0 < |z - \mathbf{i}| < 2$
- c)  $|z| > 1$

## B. Teoria

Discutere brevemente le proprietà delle funzioni olomorfe.

Rispondere poi alle seguenti domande: *non è necessario saper rispondere a tutte.*

a) Qual è un dominio massimale di definizione e olomorfia della funzione

$$\sqrt{z^2 - 4}$$

b) La funzione olomorfa  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , definita in  $|z| < 1$ , può essere prolungata analiticamente oltre il cerchio unitario? Se sì, qual è il suo dominio naturale di definizione (ammesso che ne abbia uno)?

c) La funzione olomorfa  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n$ , definita in  $|z| < 1$ , può essere prolungata analiticamente oltre il cerchio unitario? Se sì, ha un dominio naturale di definizione?

d) Qual è la funzione olomorfa che ha  $x^3 - 3y^2x + 1$  come parte reale.

\* e) Esistono due funzioni olomorfe diverse  $f(z)$  e  $g(z) \neq 0$  con  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/g(z) = 1$  e che abbiano come unica singolarità al finito un polo semplice in  $z = 1$ ?