COMPITINO I. Novembre 2007

A Esercizi

Risolvere i seguenti esercizi:

A1. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = |x|e^{-|x|} \tag{1}$$

A2. Risolvere l'equazione di Laplace all'interno del cerchio unitario del piano, trovando la soluzione che soddisfa la seguente condizione al contorno

$$u|_{x^2+y^2=1} = 2x^2 - 1 \tag{2}$$

Si consiglia di usare coordinate polari $x = r\cos\phi\,, y = r\sin\phi$ in cui l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \tag{3}$$

Esercizio Facoltativo A3. Dato il s.o.n.c u_i nello spazio di Hilbert H e l'operatore

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x, u_k)u_{k+1} \tag{4}$$

a) Dire se è densamente definito

b) Dare condizioni sui coefficienti a_k che rendano A continuo

c) Calcolare l'aggiunto di A.

B. Teoria

Rispondere poi ad almeno TRE delle seguenti domande sulla Trasformata di Fourier:

B1. Dire se le funzioni $f(x), \hat{f}(p)$ dell'esercizio A1 appartengono agli spazi $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

B2. Dato un s.o.n.c. u_i in $L^2(\mathbb{R})$, l'insieme $\hat{u}_i$ è ancora un un s.o.n.c. in $L^2(\mathbb{R})$?

B3. Dire per quali valori dei parametri reali α e β la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^\alpha (x-1)^\beta} \tag{5}$$

ammette trasformata di Fourier.

B4. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}(1+x^2)} \tag{6}$$

dire se è vero che

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(p)|^2 dp \tag{7}$$

B5. Quanto vale la doppia trasformata di Fourier $\hat{\hat{f}}$ di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

B6. È vero che $(\bar{f}, \hat{g}) = (\bar{\hat{f}}, g)$?