COMPITINO I. Novembre 2006

A Esercizi

Risolvere almeno due dei seguenti esercizi:

A1. Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-t^2/2}dt = xe^{-x^2/4} \tag{1}$$

A2. Dato il problema di Sturm-Liouville nell'intervallo $[1, e]$

$$-\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) = \lambda y$$

$$y(1) = 0\,, \qquad y(e) = 0$$

a) trovare **esplicitamente** autovalori e autovettori
b) dire se gli autovettori trovati formano un s.o.n.c.

A3. Data la famiglia di funzioni $f_a = e^{ax}$ dipendenti dal parametro reale a in $L^2[-\pi, \pi]$
a) scrivere la serie di Fourier di f_a
b) calcolare il prodotto scalare (f_a, f_b)
c) usare i precedenti risultati per determinare il valore della serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-in)(b+in)}$$

B. Teoria

Rispondere ad almeno tre delle seguenti domande, giustificando adeguatamente le risposte:

B1. Dare almeno TRE esempi di sistemi ortonormali completi in $L^2[0,1]$.

B2. L'insieme di funzioni $u_n(x) = c_n H_{2n}(x) e^{-x^2/2}$ costituisce un s.o.n.c in $L^2[0,\infty]$ (dopo opportuna normalizzazione)? Scrivere lo sviluppo della funzione $xe^{-x^2/2}$ appartenente a $L^2[0,\infty]$ su questa base.

B3. La seguente espressione

$$(f,g)_D = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\bar{g}'(x)dx$$

definisce un prodotto scalare in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? È equivalente a quello ordinario indotto dalla restrizione da $L^2(\mathbb{R})$?

B4. Per quali valori del numero intero p vale l'inclusione $L^4[0,1] \subset L^p[0,1]$?

B5. Dare un esempio di operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert che non abbia autovalori.

B6. Dare almeno DUE esempi di operatori unitari in spazi di Hilbert.

B7. Determinare l'aggiunto dell'operatore R di shift in l^2,

$$R\{x_1, x_2, ...\} = \{0, x_1, x_2, ...\}$$

B8. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x+i}$:
a) esiste la sua Trasformata di Fourier $\hat{f}(p)$?
b) calcolare $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(p)|^2 dp$.