

COMPITINO I. Novembre 2005

A1. Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = 1 - |x|, \quad |x| \leq 1, \quad f(x) = 0, \quad |x| > 1 \quad (1)$$

- a) calcolare la trasformata di Fourier
- b) \hat{f} appartiene a $L^1(\mathbb{R})$?
- c) calcolare la trasformata di Fourier di $\hat{f}(x)$

A2. Esercizio

Data la successione di funzioni $f_n(x) = \chi_{(n,2n)}/n^\alpha$ con $\alpha > 0$ (χ è la funzione caratteristica dell'intervallo), dire se converge a zero in norma L^1 e in norma $L^2(\mathbb{R})$.

B. Domande

Discutere brevemente la definizione di aggiunto di un operatore in uno spazio di Hilbert e le proprietà degli operatori autoaggiunti. Discutere la differenza tra operatore simmetrico e operatore autoaggiunto.

C. Domande Aggiuntive

****** C1) Usando il teorema della proiezione, calcolare il minimo in a e b dell'espressione

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x - a \cos x - b \sin x|^2 dx$$

******* C2) date le funzioni

$$h_n(x) = \left(x - \frac{d}{dx} \right) e^{-x^2/2} \quad (2)$$

- a) calcolare la trasformata di Fourier di h_n
- b) calcolare (h_n, h_m) .