Tema d'esame. Settembre 2006

Esercizio I Calcolare col metodo dei residui i seguenti integrali

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)} \qquad |a|^2<1, \quad |b|^2>1$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt \tag{1}$$

Esercizio II

Stabilire per quali valori del numero complesso z il vettore

$$f_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) e^{-x^2/2} \tag{2}$$

appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e calcolare il prodotto scalare (f_z, g) con la funzione $g = x^2 e^{-x^2/2}$. Ricordo che le funzioni $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}$ sono un s.o.n.c. in $L^2(\mathbb{R})$ e che $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 1$.

Esercizio III

Sviluppare la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 4z^2 + 3} \tag{3}$$

in serie di Laurent nelle seguenti regioni:

$$a)\, |z| < 1, \qquad b)\, 1 < |z| < \sqrt{3}, \qquad c)\, |z| > \sqrt{3} \tag{4}$$

Tema d'esame. Gennaio 2007

Esercizio I

Calcolare gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4\cos t} dt \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx \tag{2}$$

$$\int_{|z|=1} (z^2+1)^n (e^{\frac{1}{z^3}} - 1) dz\,, \qquad \text{per } n = 2, 3, 4 \tag{3}$$

Esercizio II

Date

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2q^n \cos nx, \tag{4}$$

a) dire (in dipendenza dal parametro complesso q) se f e g definiscono vettori di $L^2(0, 2\pi)$
b) calcolare il prodotto scalare (f, g).

Esercizio III

Sviluppare la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1} \tag{5}$$

in serie di Laurent nelle seguenti regioni:

$$a)\, 0 < |z| < 1, \qquad b)\, |z| > 1 \qquad c)\, 0 < |z-1| < \sqrt{2} \qquad d)\, 0 < |z-i| < \sqrt{2} \tag{6}$$

Spiegare come sono stati scelti i raggi delle corone circolari negli esempi a), c) e d).

Tema d'esame. Febbraio 2007

Esercizio I

Calcolare l' integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \tag{1}$$

Esercizio II

Sviluppare la funzione $f_z(x) = e^{zx}$ con z complesso in serie di Fourier nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

a) Analizzare la convergenza della serie in $x = 0$

b) Calcolare il valore della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

Esercizio III

Risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^{at}\,, \qquad \dot{x}(0) = 1\,,\ x(0) = 0$$

usando la trasformata di Laplace in dipendenza del numero reale a. Analizzare i casi particolari $a = 1$ e $a = 3$.

Esercizio IV

Dare un esempio di

a) funzione $L^3[\mathbb{R}]$ che non sia $L^1[\mathbb{R}]$ nè $L^5[\mathbb{R}]$.

b) funzione non $L^1[\mathbb{R}]$ per cui esista la Trasformata di Fourier.

c) funzione che appartenga a tutti gli $L^p[\mathbb{R}]$ con $p \geq 1$ ma non a $S[\mathbb{R}]$.

Tema d'esame. Giugno 2007

Esercizio I

Calcolare gli integrali

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+5x+4}dx, \qquad 0<\alpha<1 \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{5-4\cos\theta}d\theta \tag{2}$$

dove $f(z)$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

Esercizio II

Dato il vettore di $L^2(\mathbb{R})$

$$f_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) e^{-x^2/2}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{3}$$

calcolare il prodotto scalare (f_z, g) con le seguenti funzioni:
a) $g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) e^{-x^2/2}$
b) $g = (x^2-4)e^{-x^2/2}$
Ricordo che le funzioni $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}$ sono un s.o.n.c. in $L^2(\mathbb{R})$ e che $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 1$.

Esercizio III

Sviluppare la funzione

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2} \tag{4}$$

in serie di Laurent nelle seguenti regioni:

$$a)\ 0<|z-1|<1, \qquad b)\ 1<|z|<2, \qquad c)\ |z|>2. \tag{5}$$

Esercizio IV

Sia dato l'operatore $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ definito nel dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2[0,1] | f(1) = \alpha f(0), f'(1) = \beta f'(0)\} \tag{6}$$

a) per quali valori dei parametri complessi α e β l'operatore A é autoaggiunto?
Per i valori trovati risolvendo il punto a):
b) determinare autovalori e autofunzioni di A

Tema d'esame. Settembre 2007

Esercizio I

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^3+8)}dx,$$
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{e^{z^2}-z^2-1}dz \qquad (1)$$

Esercizio II

Data la successione

$$f_z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\sqrt{\pi n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \qquad z \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

a) Dire per quali valori del parametro complesso z, f_z definisce un elemento di $L^2(\mathbb{R})$ (valutare la norma).
b) Calcolare il prodotto scalare di f_z con $g = (x^2+2x)e^{-x^2/2}$
Ricordo che le funzioni $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}$ sono un s.o.n.c. in $L^2(\mathbb{R})$ e che $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 1$.

Esercizio IV

Sia dato l'operatore $A = -\frac{d^2}{dx^2} + \gamma$ definito nel dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2[0,1] | f(1) = \alpha f(0), f'(1) = \beta f'(0)\} \qquad (3)$$

a) per quali valori dei parametri complessi α, β e γ l'operatore A è autoaggiunto?
Per i valori trovati risolvendo il punto a):
b) determinare autovalori e autofunzioni di A